

*М. С. Конкина, С. Н. Медведева*

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

*M. S. Konkina, S. N. Medvedeva*

### A COMPARATIVE ANALYSIS OF THE GRAPHO-ANALYTICAL METHODS OF RESEARCH OF ELECTRIC CIRCUITS

**А н н о т а ц и я. Актуальность и цели.** Объектом исследования являются графоаналитические или топологические методы расчета электрических схем. Существует достаточно большое количество типов графов: графы Мейсона, Коутса, токовые, потенциально-токовые графы, потенциальные сигнальные графы и т.д. Все графы характеризуются наглядностью и представляют собой один из способов записи системы линейных уравнений. Целью работы является обоснование выбора одного из типов графов для анализа электрических схем. **Материалы и методы.** В основе исследования использован раздел неметрической математики, в основе которой заложен топологический подход к изучаемым процессам и явлениям. Полученные результаты согласуются с основными положениями теории графов и алгебраических методов, позволяющих быстро получить математические выражения, весьма удобные с точки зрения последующего анализа. **Результаты.** Исследованы различные типы графов, для каждого определены его характеристики. Выявлено, что по совокупности характеристик для анализа электрических цепей более удобными являются обобщенные сигнальные графы, которые объединяют сильные стороны графов Мейсона и Коутса и свободны от присущих им недостатков. Все разновидности сигнальных графов являются частными случаями обобщенных сигнальных графов. **Выводы.** Показано, что обобщенные сигнальные графы являются наиболее удобными для анализа электрических цепей благодаря большей информативности и наглядности представления взаимосвязей между параметрами электрической цепи.

**A b s t r a c t. Background.** The object of study is graphic or topological methods of calculation of electric circuits. There are many types of graphs: graphs Mason, Coates, current, potential-current graph, potential of the signal graphs, etc. All graphs are characterized by clarity and constitute one of the ways of the system of linear equations. The aim of this work is justification of selection of one of the types of graphs for analysis of electrical circuits. **Materials and methods.** The study used non-metric section of mathematics, which is based upon a topological approach to the study of processes and phenomena. The obtained results are consistent with the basic provisions of the theory of graphs and algebraic methods to quickly obtain mathematical expressions, is extremely convenient from the point of view of subsequent analysis. **Results.** Studied various types of graphs, each defined by its characteristics. It is revealed that the set of characteristics for the analysis of electric circuits more convenient are generalized signal graphs, which combine the strengths of the counts of Mason and Coates, and free from inherent disadvantages. All varieties of signal graphs are special cases of the generalized signal graphs. **Conclusions.** It is shown that the generalized signal graphs are the most convenient for the analysis of electric circuits, due to the greater informational content and visibility of relationships between parameters of the electrical circuit.

**К л ю ч е в ы е с л о в а:** граф, определитель графа, топологическая формула, потенциально-токовый граф, потенциальный сигнальный граф, обобщенный сигнальный граф.

**Key words:** graph, the determinant of the graph, a topological formula, potential-current graph, potential of the signal graph, the generalized signal graph.

В настоящее время существуют и эффективно работают разделы «математики без чисел», один из которых позволяет проводить топологические преобразования, упрощающие анализ результата. Другим практически важным разделом неметрической математики является теория графов, в основе которой также заложен геометрический подход к изучаемым процессам и явлениям. Это дает возможность наглядного представления взаимодействия изучаемых процессов и явлений в их взаимосвязи и взаимообусловленности. На основе указанных разделов математики были разработаны графоаналитические методы анализа. В этих методах найдено и реализовано органическое сочетание топологических и алгебраических методов, позволяющих быстро получить математические выражения, весьма удобные с точки зрения последующего анализа. Однако в приложении для исследования энергетических режимов и определения параметров электрических цепей не выявлено четких критериев выбора алгоритма, наиболее перспективного для анализа, типа графа. В связи с этим сравнение характеристик типов графов, методик их построения и выявление наиболее подходящих для анализа электрических цепей является актуальным.

Графоаналитические или топологические методы расчета электрических схем появились всего лишь около 60 лет тому назад [1, 2], но успели завоевать широкую популярность у инженеров, что обуславливается наглядностью и простотой использования данных методов. Вне зависимости от того, какого типа граф используется (Мейсона, Коутса), обобщенная процедура реализации графоаналитических методов сводится к следующему:

1. Отображение исходной (анализируемой) схемы, содержащей пассивные  $RLC$  элементы, активные источники напряжения (тока) и активные управляемые источники (усилители, повторители, преобразователи), в виде некоторой топологической структуры (графа), характеризующейся не только взаимным расположением узлов и вершин и их связями, но и некоторыми числовыми параметрами (весами вершин и дуг).

2. Расчет определителя графа, являющегося определителем системы линейных уравнений, описывающих схему.

Определитель графа  $\Delta$  – находится как сумма весов элементарных графов, т.е.

$$\Delta = \sum_i \delta_i.$$

Отсюда следует топологическая формула нахождения определителя графа [1, 2]

$$\Delta = \prod N_i + \sum L^{(S)} \Delta^{(S)} + \sum L^{(i)} L^{(k)} \Delta^{(ik)} + \dots,$$

где  $\prod N_i$  – произведение весов всех взвешенных вершин;  $\Delta^{(S)}$  – произведение весов всех взвешенных вершин, не входящих в одиночный  $S$ -й контур с весом  $L^{(S)}$ ;  $\Delta^{(ik)}$  – произведение весов взвешенных вершин, не входящих в попарно некасающиеся контуры  $i$  и  $k$  с весами  $L^{(i)}$  и  $L^{(k)}$ .

3. Расчет необходимых схемных функций, т.е. отношений интересующих токов и напряжений. Для этого используется топологическая формула передачи, которая позволяет определить соотношение двух любых переменных либо отношение исследуемой переменной к значению активного воздействия на исследуемую цепь. Для нахождения схемной функции используется формула Мейсона [2]

$$T_{kl} = \frac{x_k}{x_l} = \frac{1}{\Delta} \sum_s P^{(s)} \Delta^{(s)},$$

где  $\Delta$  – определитель графа;  $P^{(s)}$  – вес  $s$ -го пути из вершины-истока  $x_l$  к вершине  $x_k$ ;  $\Delta^{(s)}$  – определитель части графа, не касающейся  $s$ -го пути.

Ориентированные графы представляют собой один из способов записи системы линейных уравнений или, в иной терминологии, являются топологической моделью системы линейных уравнений. Существует целый ряд разновидностей и модификаций графов, с помощью которых отображаются свойства электрических цепей. Рассмотрим наиболее широко применяемые методы топологического анализа и проведем их сравнение на примере расчета тока  $i_3$

и напряжения в точке  $c$  для активной электрической цепи, представленной на рис. 1. Покажем параллельно, что все разновидности сигнальных графов являются частными случаями обобщенных сигнальных графов (ОСГ).

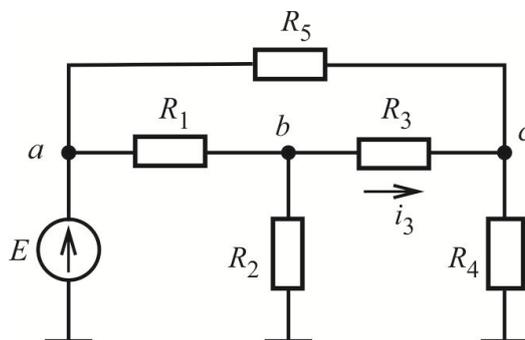


Рис. 1. Анализируемая схема

Построим потенциально-токовый граф (рис. 2) и соответствующий ему ОСГ (рис. 3). По ОСГ рассчитаем определитель

$$\Delta_{\text{осг}} = R_3(R_1Y_2 + 1) \cdot (R_5Y_4 + 1) + R_1(R_5Y_4 + 1) + R_5(R_1Y_2 + 1).$$

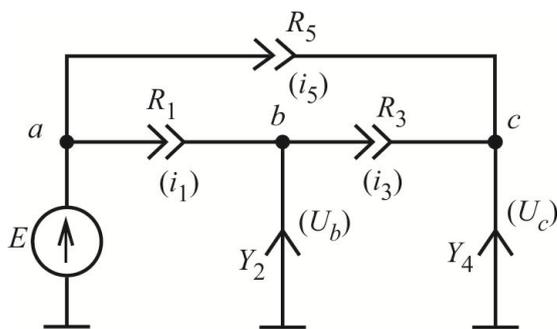


Рис. 2. Потенциально-токовый граф

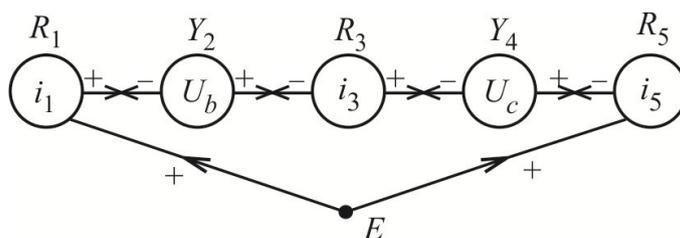


Рис. 3. Обобщенный сигнальный граф

Искомые ток и напряжение определяются на основании топологической формулы передачи (1) [1]

$$i_3 = E \left( \frac{i_3}{E} \right) = \frac{E}{\Delta_{\text{осг}}} [(R_5Y_4 + 1) + (R_1Y_2 + 1)];$$

$$U_c = E \left( \frac{U_c}{E} \right) = \frac{E}{\Delta_{\text{осг}}} [R_1R_3Y_2 + R_1 + R_3 + R_5].$$

Потенциальные сигнальные графы (ПСГ) основываются на составлении системы линейных уравнений, описывающих анализируемую цепь методом узловых потенциалов. Этот метод более удобен в тех случаях, когда требуется непосредственно находить напряжения в различных точках цепи относительно общего узла (земли).

Потенциальный сигнальный граф может быть получен непосредственно из ОСГ путем исключения из графа рис. 3 токовых вершин  $i_1$ ,  $i_3$  и  $i_5$ . После исключения вершин получаем ПСГ рис. 4. Его определитель описывается выражением

$$\Delta_{\text{ПСГ}} = (Y_1 + Y_2 + Y_3) \cdot (Y_3 + Y_4 + Y_5) - Y_3^2,$$

а соответствующие ток и напряжение

$$i_3 = (U_b - U_c) Y_3 = \frac{E Y_3}{\Delta_{\text{ПСГ}}} [Y_5 Y_3 + Y_1 (Y_4 + Y_3 + Y_5) - Y_1 Y_3 - Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)] = \frac{E Y_3}{\Delta_{\text{ПСГ}}} [Y_1 Y_4 - Y_5 Y_3];$$

$$U_c = \frac{E}{\Delta_{\text{ПСГ}}} [Y_1 Y_3 + Y_5 (Y_1 + Y_2 + Y_3)].$$

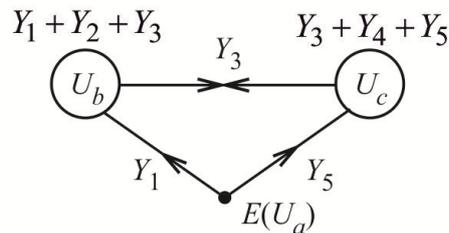


Рис. 4. Потенциальный сигнальный граф

Токовые сигнальные графы (ТСГ) строятся на основе системы линейных уравнений, описывающей исследуемую цепь, построенной методом контурных токов. Данный метод целесообразно использовать в тех случаях, когда требуется найти токи в токовых ветвях главных контуров ПТГ (рис. 2) или когда в цепи имеется много узлов, но мало контуров.

ТСГ можно получить непосредственно из ОСГ (рис. 3) путем исключения потенциальных вершин  $U_b$  и  $U_c$ . После исключения указанных вершин получаем токовый сигнальный граф (рис. 5). Веса вершин в ТСГ представляют собой так называемое собственное сопротивление контура, равное сумме всех сопротивлений, входящих в  $s$ -й контур. Соответствующий определитель описывается выражением

$$\Delta_{\text{ТСГ}} = (R_2 + R_3 + R_4)(R_1 + R_2)(R_5 + R_4) - R_4^2 (R_1 + R_2) - R_2^2 (R_4 + R_5),$$

а искомые ток и напряжение

$$i_3 = \frac{E}{\Delta_{\text{ТСГ}}} [R_2 \cdot (R_4 + R_5) + R_4 \cdot (R_1 + R_2)];$$

$$U_c = R_4 (i_3 + i_5) = \frac{R_4 E}{\Delta_{\text{ТСГ}}} [R_2 (R_4 + R_5) + R_4 (R_1 + R_2) + R_2 R_4 + (R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4) - R_2^2].$$

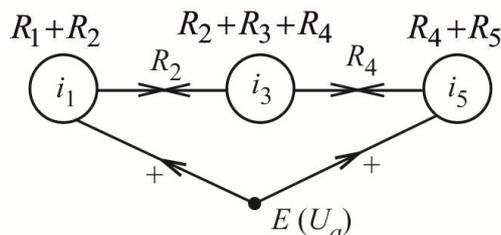


Рис. 5. Токовый сигнальный граф

Классические общепринятые графы Мейсона [2] отличаются от потенциальных сигнальных графов тем, что веса их вершин равны 1, а веса дуг делятся на веса потенциальных

вершин ПСГ, в которые эти дуги входят. Прделав с учетом сказанного необходимые операции, получим *потенциальный граф Мейсона* (ПГМ), представленный на рис. 6. Его определитель представляется выражением

$$\Delta_{\text{ПГМ}} = 1 - \frac{Y_3^2}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5)},$$

а искомые ток и напряжение

$$i_3 = \frac{EY_3}{\Delta_{\text{ПГМ}}} \left[ \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} + \frac{Y_3Y_5 - Y_1Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5)} - \frac{Y_5}{Y_3 + Y_4 + Y_5} \right];$$

$$U_c = \frac{E}{\Delta_{\text{ПГМ}}} \left[ \frac{Y_5}{Y_3 + Y_4 + Y_5} + \frac{Y_1Y_3}{(Y_1 + Y_2 + Y_3)(Y_3 + Y_4 + Y_5)} \right].$$

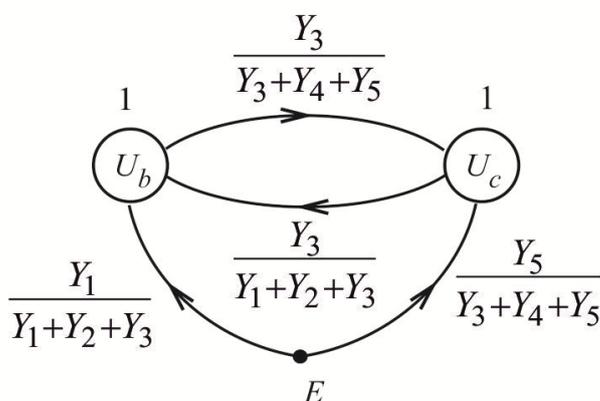


Рис. 6. Потенциальный граф Мейсона

*Токовые графы Мейсона* (ТГМ) легко получить из сигнальных токовых графов, если проделать операции, аналогичные используемым при переходе от ПСГ к ПГМ. На рис. 7 приведен ТГМ, полученный из ТСГ рис. 5.

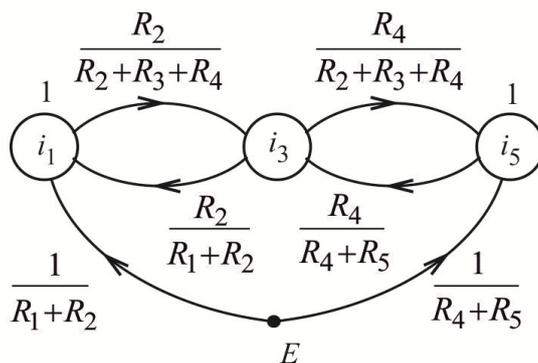


Рис. 7. Токовый граф Мейсона

Согласно приведенному ТГМ имеем

$$\Delta_{\text{ТГМ}} = 1 - \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4)} - \frac{R_4^2}{(R_4 + R_5)(R_2 + R_3 + R_4)};$$

$$i_3 = \frac{E}{\Delta_{\text{ТГМ}}} \left[ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4)} + \frac{R_4}{(R_4 + R_5)(R_2 + R_3 + R_4)} \right];$$

$$U_c = \frac{R_4 E}{\Delta_{\text{ТТМ}}} \left[ \frac{R_2}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4)} + \frac{R_4}{(R_4 + R_5)(R_2 + R_3 + R_4)} + \frac{R_2 R_4}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4)(R_2 + R_3 + R_4)} + \frac{R_2^2}{(R_4 + R_5)(R_1 + R_2)(R_2 + R_3 + R_4)} \right].$$

Были также рассмотрены потенциальные, токовые графы Коутса, обобщенные графы Коутса и Мейсона [3]. Построена табл. 1, где приведены основные топологические характеристики графов и даны оценки сложности аналитических вычислений. По результатам анализа рассмотренного примера можно сделать следующие выводы:

1. Самыми неудобными с практической точки зрения являются графы Коутса, которые характеризуются весьма громоздкой процедурой определения знака слагаемых при расчете определителей.

2. Достоинством графов Коутса является то обстоятельство, что графы этого типа непосредственно соответствуют системе линейных уравнений в самой общей форме.

3. Графы Мейсона предлагают простые топологические решения, но вычисляемые с их помощью схемные функции требуют проведения дополнительных алгебраических преобразований для приведения к виду, удобному для анализа.

4. Самые удачные позиции (по совокупности характеристик) среди рассмотренных графов для анализа электрических цепей занимают обобщенные сигнальные графы, которые объединяют сильные стороны графов Мейсона и Коутса и вместе с тем свободны от свойственных им недостатков.

Таблица 1

Основные топологические характеристики графов

Характеристики	Обобщенные сигнальные графы			Графы Мейсона			Графы Коутса		
	ОСГ	ПСГ	ТСГ	ПГМ	ТГМ	ОГМ	ПГК	ТГК	ОГК
Число вершин	6	3	4	3	4	6	3	4	6
Число дуг	10	4	6	4	6	10	6	9	15
Число контуров	4	1	2	1	2	4	3	5	9
Число петель	–	–	–	–	–	–	2	3	5
Веса вершин	$R_i$ или $Y_i$	$\sum_i Y_i$	$\sum_i R_i$	1	1	1	1	1	1
Веса дуг	$\pm 1$	$Y_i$	$R_i$	$\frac{Y_k}{\sum_i Y_i}$	$\frac{R_k}{\sum_i R_i}$	$R_i$ или $Y_i$	$\pm 1$ или $Y_i$	$\pm 1$ или $R_i$	$\pm 1$ или $R_i$ или $Y_i$
Размерность $\Delta$	[Ом]	[Ом] <sup>-2</sup>	[Ом] <sup>3</sup>	[1]	[1]	[1]	[Ом] <sup>-2</sup>	[Ом] <sup>3</sup>	[Ом]
Число операций для вычисления $\Delta$									
– умножения/деления;	8	1	4	2	4	8	3	7	24
– сложения/вычитания;	6	5	8	5	8	7	7	11	15
– возведения в степень	–	1	2	1	2	–	3	5	8

Обобщенные сигнальные графы были использованы для синтеза имитационных моделей переменных сопротивлений [4], для анализа помехоустойчивости схем измерительных цепей [5], для анализа пассивных схем включения резистивно-емкостного датчика [6], для исследования краевых эффектов в резистивно-емкостных датчиках [7], для анализа влияния неидеальных входных активных воздействий на измерительную цепь [8]. В этих работах показано, что с помощью обобщенных сигнальных графов можно легко и просто провести анализ или исследование различных эффектов в измерительных цепях.

Таким образом, как показано выше, обобщенные сигнальные графы являются наиболее удобными для анализа электрических цепей благодаря большей информативности и наглядности представления взаимосвязей между параметрами электрической цепи.

### *Библиографический список*

1. *Анисимов, В. И.* Топологический расчет электронных схем / В. И. Анисимов. – Л. : Энергия, 1977. – 240 с.
2. *Мэзон, С.* Электронные цепи, сигналы и системы / С. Мэзон, Г. Циммерман ; пер. с англ. под ред. А. А. Соколова. – М. : Изд-во иностр. лит., 1969. – 619 с.
3. *Медведева, С. Н.* Анализ и синтез измерительных цепей датчиков с распределенными параметрами : дис. ... канд. техн. наук / Медведева С. Н. – Пенза, 2002. – 213 с.
4. *Медведева, С. Н.* Применение сигнальных графов для синтеза имитационных моделей переменных сопротивлений / С. Н. Медведева, В. И. Чернецов, М. В. Чернецов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2011. – № 8. – С. 47–50.
5. *Чернецов, М. В.* Анализ помехоустойчивости схем измерительных цепей с применением обобщенных сигнальных графов / М. В. Чернецов // Вестник Самарского государственного технического университета. – 2011. – № 3 (31). – С. 104–109.
6. *Медведева, С. Н.* Анализ пассивных схем включения резистивно-емкостного датчика на основе обобщенных сигнальных графов / С. Н. Медведева, М. В. Чернецов // Современные проблемы науки и образования. – 2012. – № 6 (44). – URL: <http://science-education.ru>
7. *Медведева, С. Н.* Исследование краевых эффектов в резистивно-емкостных датчиках / С. Н. Медведева, В. Д. Михотин, М. В. Чернецов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2002. – С. 196–197.
8. *Васильев, П. В.* Применение обобщенных сигнальных графов к анализу влияния неидеальных входных активных воздействий на измерительную цепь / П. В. Васильев, С. Н. Медведева, М. В. Чернецов // Теория и практика современной науки : материалы VII Междунар. дистанц. науч.-практ. конф. – М. : Науч.-информ. издат. центр «Институт Стратегических Исследований», 2012. – С. 81–85.

#### **Конкина Мария Сергеевна**

аспирант,  
Пензенский государственный университет  
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: myzochka@list.ru

#### **Konkina Maria Sergeevna**

postgraduate student,  
Penza State University  
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

#### **Медведева Светлана Николаевна**

кандидат технических наук, доцент,  
и.о. заведующего кафедрой прикладной  
и бизнес информатики,  
Пензенский филиал Московского государственного  
университета технологий и управления  
им. К. Г. Разумовского  
(Первый казачий университет)  
(Россия, г. Пенза, ул. Володарского, 6)  
E-mail: sn-medvedeva@yandex.ru

#### **Medvedeva Svetlana Nikolaevna**

candidate of technical sciences, associate professor,  
acting head of sub-department of applied and business  
informatics,  
Penza branch of K. G. Razumovsky Moscow State  
University of Technologies and Management  
(First Cossack University)  
(6 Volodarskogo street, Penza, Russia)

УДК 519.171, 621.317.3

**Конкина, М. С.**

**Сравнительный анализ графоаналитических методов исследования электрических цепей /**  
М. С. Конкина, С. Н. Медведева // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2018. –  
№ 2 (24). – С. 19–25. – DOI 10.21685/2307-5538-2018-2-3.