

УДК 621.317

М. Г. Мясникова, О. Н. Никишин, Б. В. Цыпин

О РАЦИОНАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ШАГА ДИСКРЕТИЗАЦИИ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕДУР НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЧАСТНЫХ И РАЗНОСТЕЙ

M. G. Myasnikova, O. N. Nikishin, B. V. Cypin

ON THE RATIONAL CHOICE OF THE SAMPLING STEP IN THE MEASUREMENT PROCEDURES BASED ON THE QUOTIENTS-DIFFERENCES METHOD

А н н о т а ц и я. Рассмотрена возможность применения метода частных и разностей для измерения параметров полигармонических сигналов. Исследовано влияние числа периодов и шага дискретизации на погрешности измерения амплитуды и частоты сигнала при применении данного метода.

A b s t r a c t. The possibility of measurement of polyharmonic signals parameters using quotients-differences method is considered. The effect of number of periods and sampling step on the measurement error of amplitude and frequency of the signal are investigated at the given method.

К л ю ч е в ы е с л о в а: метод частных и разностей, шаг дискретизации, период, погрешность, длительность измерения.

K e y w o r d s: quotients-differences method, sampling step, period, accuracy, sampling time.

В настоящее время все больше математических методов, традиционно использовавшихся для решения таких задач, как, например, интерполяция функций или обработка сигналов (и, в частности, спектральный анализ), находят применение и в измерительных задачах. Это связано с тем, что, как правило, многие из таких методов оперируют с параметрами, связанными с физическими параметрами сигналов. Таким образом, указав погрешность, с которой мы можем измерять эти параметры, а также параметры регистрации самого сигнала, на основе алгоритма обработки мы получим методику измерения.

Одним из таких алгоритмов, пригодных как для измерительных процедур, так и для задач сжатия и восстановления сигналов, является алгоритм частных и разностей (QD-алгоритм), описанный Г. Рутисхаузером в [1]. В частности, этот алгоритм используется для решения задачи интерполяции функции $x(t)$ экспоненциальными суммами:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\alpha_k t}, \quad (1)$$

где параметры c_k и α_k в общем случае являются комплексными числами, а показатели α_k удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \alpha_k \leq 0$ для всех k .

В измерительных задачах речь идет уже об аппроксимации временных рядов, т.е. функций, заданных таблично. Задача экспоненциальной аппроксимации сигнала $x(t)$, рассматриваемого в промежутке $[t_0, T]$, состоит в определении параметров экспоненциальной суммы (1)

по результатам N измерений $\{x(t_i)\}_0^{N-1}$ сигнала $x(t)$ в заданные последовательные моменты времени $\{t_i\}_0^{N-1}$, $t_i \in [t_0, T]$.

Для нахождения коэффициентов $\{c_k\}_1^n$, показателей $\{\alpha_k\}_1^n$ и параметра n экспоненциальной суммы (1) будем считать $N \geq 2n$, $t_{N-1} \leq T$. При этом n фактически является порядком аппроксимирующей модели, от которого зависят сложность решения задачи и согласованность между экспоненциальной суммой (1) и реальным сигналом $x(t)$.

В нашем случае будем рассматривать равноотстоящие узлы, причем выполняется равенство $N = 2n$, параметры задачи $\{c_k\}_1^n$, $\{\alpha_k\}_1^n$ будем считать вещественными.

Положим $x(t_i) = x_n(t_i)$, и при фиксированном порядке n для равноотстоящих узлов получим систему уравнений

$$x(t_i) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\alpha_k(t_0 + i\Delta t)}, i = 0, 1, \dots, N-1, N \geq 2n, \quad (2)$$

для определения неизвестных параметров $\{c_k\}_1^n$, $\{\alpha_k\}_1^n$.

Систему (2) несложно привести к следующему виду:

$$x(t_i) = \sum_{k=1}^n d_k z_k^i, i = 0, 1, \dots, N-1, N \geq 2n, \quad (3)$$

где $d_k = c_k e^{\alpha_k t_0}$, $z_k = e^{\alpha_k \Delta t}$.

Подход Рутисхаузера к интерполяции функции $x(t)$ экспоненциальной суммой (1) базируется на использовании z -преобразования $X(z)$ этой функции:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x(t_i)}{z^{i+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{d_k}{z - z_k}, d_k = c_k e^{\alpha_k t_0}, z_k = e^{\alpha_k \Delta t}, \quad (4)$$

где функция $X(z)$ с помощью соотношений (2), (3) представляется в виде суммы простейших дробей. Поэтому задача нахождения неизвестных параметров $\{z_k\}_1^n$ и $\{d_k\}_1^n$ в (4) может быть решена с помощью оригинального алгоритма частных и разностей (QD-алгоритма) [1].

Основой QD-алгоритма являются простые правила ромба:

$$\begin{cases} e_j^{(i)} = e_{j-1}^{(i+1)} + q_j^{(i+1)} - q_j^{(i)}; \\ q_{j+1}^{(i)} = q_j^{(i+1)} \frac{e_j^{(i+1)}}{e_j^{(i)}}. \end{cases} \quad (5)$$

Правила ромба применяются при $i = 0, 1, \dots, N-1$, $j = 1, 2, \dots$, и следующих начальных условиях: $e_0^{(i)} = 0$, $q_1^{(i)} = x(t_{i+1}) / x(t_i)$.

Каждая из формул (5) связывает четыре элемента, располагаемых в вычислительной схеме в вершинах Q- и D-ромбов. Такая вычислительная схема, основанная на соотношениях (5), довольно проста и является обобщением известной вычислительной схемы, использующей конечные разности.

QD-алгоритм тесно связан с теорией непрерывных дробей. Он преобразует исходную последовательность $\{x(t_i)\}_0^{N-1}$ в новую последовательность $\{q_j^{(0)}, e_j^{(0)}\}$, которая дает представление $X(z)$ в виде непрерывной дроби

$$X(z) = \frac{x(t_0)}{z - q_1^{(0)}} - \frac{e_1^{(0)} q_1^{(0)}}{z - q_2^{(0)} - e_1^{(0)}} - \frac{e_2^{(0)} q_2^{(0)}}{z - q_3^{(0)} - e_2^{(0)}} - \dots \quad (6)$$

Функцию $X(z)$ несложно записать в виде отношения двух многочленов $U_{n-1}(z)$ и $V_n(z)$ степеней $n-1$ и n соответственно:

$$X(z) = \frac{U_{n-1}(z)}{V_n(z)}. \quad (7)$$

Сравнение выражений (6) и (7) показывает, что числа $\{z_k\}_1^n$ являются корнями уравнения $V_n(z) = 0$, а числа $\{d_k\}_1^n$ вычисляются по формуле

$$d_k = \frac{U_{n-1}(z_k)}{V'_n(z_k)}, k=1, \dots, n. \quad (8)$$

Нетрудно догадаться, что вычисляемые при реализации такой процедуры параметры c_k и α_k будут нести информацию о физических параметрах сигнала. Так, параметры α_k несут информацию о частотах, входящих в состав сигнала, а c_k являются соответствующими им комплексными амплитудами.

Погрешность определения этих параметров зависит как от погрешности исходных данных, так и от методической погрешности алгоритма их обработки.

Целями работы были исследование погрешностей, обеспечиваемых данным методом, а также установление предельных значений параметров регистрации сигнала, при которых можно гарантировать обеспечение заданной точности. Такими параметрами могут быть соотношение между периодом сигнала и временем измерения n , общее число измерений (число дискретных отсчетов сигнала N), шаг дискретизации Δt . Аналитическое исследование погрешностей метода невозможно, поэтому необходимо было провести моделирование процесса измерения, которое позволило бы оценить погрешности измерения и сформулировать некоторые рекомендации по их уменьшению.

В качестве сигнала при исследовании применялась следующая дискретная модель:

$$u_i = \sum_{m=1}^p U_m \cos(2\pi i \Delta t f_m + \phi_m) + \xi_i \frac{1}{q}, i=1, \dots, N, \quad (9)$$

где U_m , f_m , ϕ_m – амплитуда, частота и фаза m -той гармоники сигнала соответственно; i – номера отсчетов сигнала (дискретное время); Δt – шаг дискретизации; ξ_i – значения аддитивного белого шума с нулевым матожиданием и дисперсией $\sigma_{\text{ш}} = 0,1$ в моменты отсчетов; q – отношение сигнал/шум; N – количество зарегистрированных дискретных отсчетов.

В качестве основного параметра, оказывающего наибольшее влияние на погрешность измерения, и был выбран шаг дискретизации. Однако, как известно, этот параметр тесно связан с полосой частот, в которой находится исследуемый сигнал. Чтобы не привязываться к конкретным частотным диапазонам, было решено исследовать влияние шага дискретизации косвенным образом. При этом шаг дискретизации определялся соотношением

$$\Delta t = n / (N f_{\text{изм}}), \quad (10)$$

где n – параметр, который условно назовем «число периодов сигнала за время измерения»; $f_{\text{изм}}$ – измеряемая частота. «Условно» здесь означает, что для периодических сигналов, если принять шаг дискретизации как расстояние между отсчетами за условную единицу, которая соответствует периоду повторения конкретного сигнала, параметр n и будет физически являться числом периодов сигнала за время измерения, соответствующим длине N . Для непериодических же сигналов моделирование проводится таким же образом, однако применение термина «число периодов сигнала за время измерения» здесь уже будет являться не столь корректным, однако и в этом случае этот параметр также может быть пересчитан в шаг дискретизации, соответствующий определенной длительности измерения и полосе частот.

Поэтому с целью проведения эксперимента по моделированию метода частных и разностей в относительных единицах мы исследовали влияние шага дискретизации на погрешности измерения параметров путем измерения числа периодов модельного сигнала. При этом число периодов изменялось от 1 до 70. Верхний предел был выбран экспериментально и является достаточным для выявления нужных закономерностей. При проведении этого эксперимента фактически изменяется частота сигнала (и адаптивно к ней шаг дискретизации). Поэтому по результатам проведения такого эксперимента мы сможем дать рекомендации о выборе шага дискретизации в зависимости от частоты измеряемого колебания.

В ходе эксперимента использовались следующие параметры модели (9): соотношение сигнал/шум $q = 100$, число отсчетов сигнала $N = 150$. Кроме того, для моделирования квантования, обусловленного наличием АЦП, модель (9) была дополнена следующим образом:

$$\tilde{u}_i = \frac{\text{round}\{2^d [u_i]\}}{2^d},$$

где d – количество разрядов АЦП с двоичным шагом квантования, которое в данном эксперименте было принято равным 20; $\text{round}\{x\}$ – ближайшее целое число x в скобках.

Измеряемыми параметрами в данном эксперименте были амплитуды и частоты составляющих модельного сигнала. При этом частоты определялись через параметры α_k , оцененные методом частных и разностей по модели (1) $f_k = \arctg\left[\frac{\text{Im}\alpha_k}{\text{Re}\alpha_k} \cdot \frac{1}{2\pi\Delta t}\right]$, а амплитуды – через параметры c_k той же модели: $U_k = |c_k|$.

При моделировании измерения одного колебания в отсутствие периодических помех зависимость погрешностей от числа периодов сигнала имеет вид, приведенный на рис. 1.

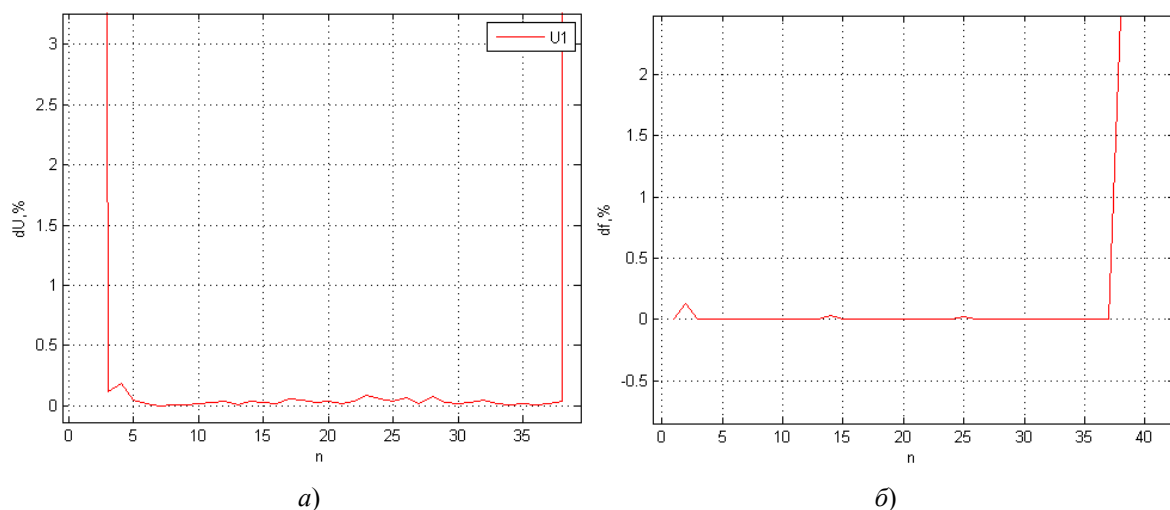


Рис. 1. Влияние числа периодов сигнала на погрешность измерения:
а – амплитуды; б – частоты

Из графика видно, что число периодов сигнала, которое принимается за время измерения, ограничено с двух сторон. Сверху оно ограничено резко и соответствует такому построению измерительного эксперимента, при котором на период колебания приходится 4–4,5 отсчета. Граница снизу более плавная. Если принять нижнюю границу на уровне 0,8 %, то число отсчетов на период находится в диапазоне от 100 до 130.

Когда рассматривается случай приема сигнала с периодическими помехами, это соответствует полигармоническому сигналу, т.е. в модели (9) присутствует несколько слагаемых, соответствующих разным частотам, причем только одна из них считается информативной. Графики погрешностей для такого эксперимента приведены на рис. 2.

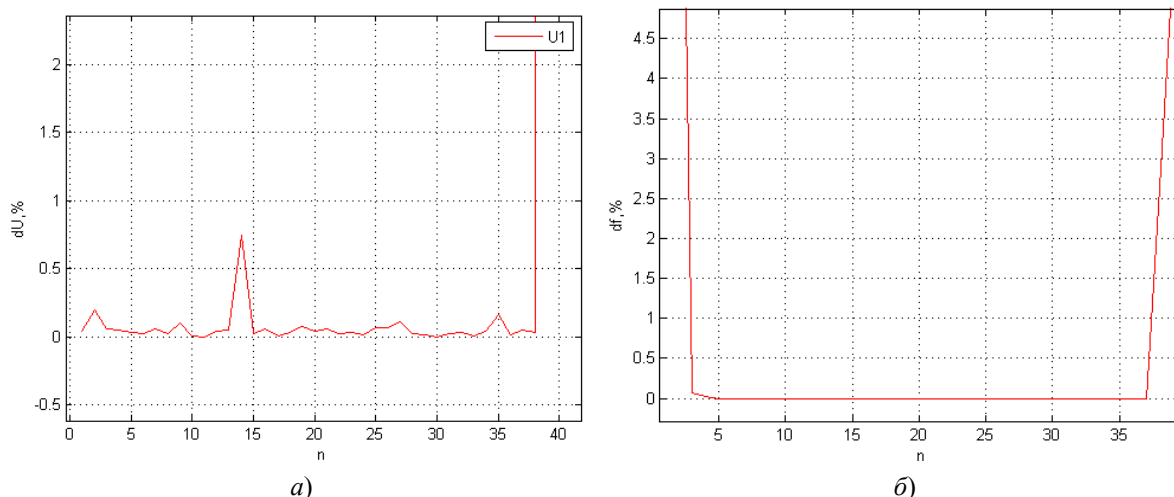


Рис. 2. Влияние числа периодов сигнала на погрешность измерения:
а – амплитуды; б – частоты при наличии гармонических помех

Сравнивая графики зависимостей для одного и трех гармонических сигналов, стоит обратить внимание, что во втором случае ширина оптимального (по критерию минимизации погрешности) диапазона значения числа периодов измеряемого сигнала практически не изменилась, а величина погрешности изменилась на 10 % от первого случая.

Если границу снизу выбрать также на уровне примерно 0,8 %, то число периодов устанавливается около 90–80.

Результаты исследования влияния на погрешности числа периодов за время измерения можно связать с параметром шага дискретизации. Очевидно, что при отсутствии шума достаточно двух отсчетов на период измеряемого сигнала при применении данного алгоритма измерения, в присутствии же помех этот показатель увеличивается – необходимо регистрировать уже более трех отсчетов за период. Если в принятом сигнале присутствует и периодическая помеха, то число точек на период следует увеличить до 4–5.

Исходя из соотношения (10), принятого при моделировании, шаг дискретизации Δt следует выбирать:

- для сигнала со случайной помехой $1/(5 \dots 30 \cdot f_{\text{изм}})$;
- для сигнала со смесью периодической и случайной помехи $1/(6 \dots 10 \cdot f_{\text{изм}})$.

Проводя этот эксперимент, фактически, мы меняли не только длину реализации сигнала, но и его частоту. Как уже было объяснено, эти частотные свойства явно отразились на зависимости погрешности, так как с частотой было связано и определение шага дискретизации. При этом шаг дискретизации, задаваемый выражением (10), зависел от измеряемой частоты,

что приводило к нарушению требований теоремы Котельникова при $N \leq \frac{n}{\Delta t \cdot f} = \frac{n}{f/2f} = 2n$.

Именно этим и объясняется характер зависимостей, приведенных на рис. 1 и 2, – скачкообразное увеличение погрешности при крайних значениях параметра n говорит о нарушении теоремы Котельникова. Таким образом, выбирая параметр n в пределах границ скачкообразных изменений, мы тем самым можем выбрать шаг дискретизации, не только удовлетворяющий теореме Котельникова, но и позволяющий минимизировать методическую погрешность, связанную с применением метода частных и разностей.

Результаты проведенных исследований показывают, что предложенные алгоритмы, использующие аппроксимацию экспоненциальными суммами на основе метода частных и разностей, с успехом могут применяться для измерительных процедур, обеспечивая при этом погрешность измерения параметров не более 1 %, а рациональный подход к выбору параметров регистрации сигнала позволит уменьшить эту погрешность в разы.

Список литературы

1. Рутисхаузер, Г. Алгоритм частных и разностей / Г. Рутисхаузер. – М. : Иностранная литература, 1960. – 94 с.
2. Джоунс, У. Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения / У. Джоунс, В. Трон. – М. : Мир, 1985. – 414 с.

Мясникова Мария Геннадьевна

кандидат технических наук, доцент,
кафедра информационно-измерительной техники,
Пензенский государственный университет
E-mail: urchin_blue@mail.ru

Myasnikova Mariya Gennad'evna

candidate of technical sciences,
associate professor,
sub-department of information
and measuring technique,
Penza State University

Никишин Олег Николаевич

аспирант,
Пензенский государственный университет
E-mail: gtleon@mail.ru

Nikishin Oleg Nikolaevich

postgraduate student,
Penza State University

Цыпин Борис Вульфович

доктор технических наук, профессор,
кафедра информационно-измерительной техники,
Пензенский государственный университет
E-mail: cypin@yandex.ru

Tsy-pin Boris Vul'fovich

doctor of technical sciences, professor,
sub-department of information
and measuring technique,
Penza State University

УДК 621.317

Мясникова, М. Г.

О рациональном выборе шага дискретизации при проведении измерительных процедур на основе метода частных и разностей / М. Г. Мясникова, О. Н. Никишин, Б. В. Цыпин // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2012. – № 2. – С. 62–67.