

УДК 621.317

Н. Н. Вершинин, О. Е. Безбородова, Д. П. Грузин, Л. А. Авдонина

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ БАЛАНСИРОВОЧНОГО СТАНКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ МАССОВО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

N. N. Vershinin, O. E. Bezborodova, D. P. Gruzin, L. A. Avdonina

STUDY OF THE DYNAMICS OF THE BALANCING MACHINE FOR MEASURING MASS-GEOMETRIC PARAMETERS OF BODYS OF REVOLUTION

А н н о т а ц и я. Проведено исследование динамических характеристик станка для балансировки ротора. Приведены методика и расчет кинетической и потенциальной энергии балансировочной системы. Построена векторная диаграмма процесса балансировки ротора. Предложена схема определения обобщенных сил упругости. Проведен расчет значений обобщенных координат.

A b s t r a c t. A study of the dynamic characteristics of the machine for rotor balancing. The method and calculation of kinetic and potential energy balancing system. Constructed a vector diagram of the balancing of the rotor. A scheme for determining the generalized elastic forces. The calculation of the values of generalized coordinates.

К л ю ч е в ы е с л о в а: измерение, тело вращения, ротор, динамика процесса, балансировочный процесс, массово-геометрические параметры.

К е у w o r d s: measurement, body of revolution, rotor, dynamics of the process, balancing process, mass-geometric parameters.

Рост скоростей вращения роторов и им подобных деталей в различных изделиях машиностроения требует создания высокотехнологичного оборудования, обеспечивающего эффективный контроль качества их изготовления.

Повышение скорости, долговечности и точности работы машин непосредственно связано с совершенствованием методов и средств динамического уравнивания их узлов и деталей. Поэтому проблеме создания технических средств измерения неуравновешенности тел вращения постоянно уделяется большое внимание [1, 2]. В нашей стране созданы балансировочные автоматические линии для балансировки коленчатых валов автомобильных двигателей, автоматы для балансировки гидродвигателей, микродвигателей и приборных систем, балансировочные станки для балансировки в собранном виде электродвигателей и т.д. [3].

В настоящее время для балансировки тел вращения типа роторов применяются станки, в которых реализуется метод малых угловых колебаний, который позволяет исключить высокую скорость вращения роторов при измерении неуравновешенности [4].

Для реализации системы контроля качества роторов была разработана динамическая модель балансировочного станка с шестью степенями свободы и дано ее математическое описание системой линейных дифференциальных уравнений.

Решение задачи было проведено с помощью уравнений Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dT}{dq_i} \right) - \frac{dT}{dq_i} = - \frac{d\Pi_1}{dq_i} - \frac{d\Pi_2}{dq_i}. \quad (1)$$

Не раскрывая всех преобразований, покажем последовательность решения задачи и результат.

Во-первых, строим векторную диаграмму процесса балансировки ротора и выбираем системы координат (рис. 1), где используем следующие обозначения: $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$, $[x_3, y_3, z_3]$ – системы координат; φ – угол собственного вращения; ψ – угол прецессии; θ – угол нутации; ξ, η, ζ – координаты центра тяжести платформы относительно неподвижной системы координат.

Во-вторых, производим преобразование координат.

В-третьих, определяем кинетическую и потенциальную энергию системы.

Для ориентации тел механической системы выберем следующие системы координат:

$S_0(x_0, y_0, z_0)$ – система координат (инерциальная), жестко связанная с основанием и совпадающая с центром масс платформы в состоянии ее покоя;

$S(x, y, z)$ – система координат, движущаяся поступательно относительно инерциальной системы S_0 , начало координат которой совпадает в процессе движения с центром масс платформы O_1 . Ее положение по отношению к S_0 задается координатами ξ, η, ζ ;

$S_{0\psi}(\tilde{o}_{0\psi}, \acute{o}_{0\psi}, z_{0\psi})$ – промежуточная система координат, получающаяся поворотом системы S на угол ψ вокруг оси Z ;

$S_{0\theta}(\tilde{o}_{0\theta}, \acute{o}_{0\theta}, z_{0\theta})$ – промежуточная система координат, получающаяся поворотом системы $S_{0\psi}$ на угол θ вокруг оси $\tilde{O}_{0\psi}$;

$S_1(\tilde{o}_1, \acute{o}_1, z_1)$ – система координат, жестко связанная с платформой, получающаяся поворотом системы $S_{0\theta}$ на угол φ вокруг оси $Z_{0\theta}$. Положение S_1 относительно S определяется углами ψ, θ, φ , относительно S_0 – координатами $\xi, \eta, \zeta, \psi, \theta, \varphi$;

$S_2(\tilde{o}_2, \acute{o}_2, z_2)$ – система координат, жестко связанная с обоймой, получающаяся поворотом системы S_1 на угол φ_m вокруг оси Z_1 . Положение S_2 относительно S определяется углами $\psi, \theta, \varphi, \varphi_m$, относительно S_0 – параметрами $\xi, \eta, \zeta, \psi, \theta, \varphi, \varphi_m, \varphi_0$;

$S_{2l}(\tilde{o}_{2l}, \acute{o}_{2l}, z_{2l})$ – система координат, получающаяся параллельным переносом системы S_2 вдоль оси Z_2 на величину l ;

$S_3(\tilde{o}_3, \acute{o}_3, z_3)$ – система координат, жестко связанная со снарядом, получающаяся поворотом системы S_{2l} вокруг оси X_{2l} на угол α .

Положение S_3 относительно S определяется параметрами $\psi, \theta, \varphi, \varphi_m, \alpha$, относительно S_0 – параметрами $\xi, \eta, \zeta, \psi, \theta, \varphi, \varphi_m, \varphi_0, \alpha$.

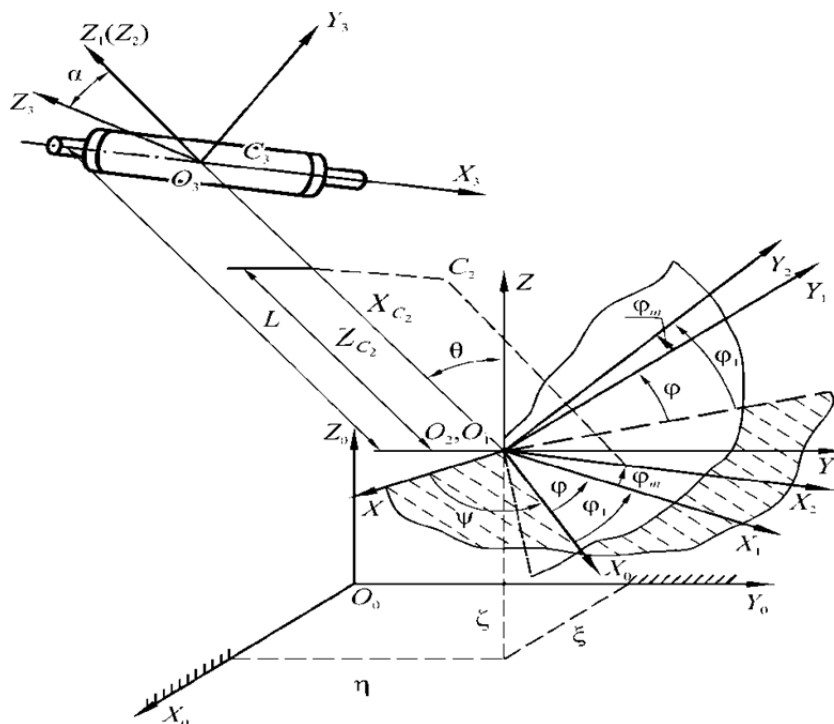


Рис. 1. Векторная диаграмма процесса балансировки ротора

Для решения задачи необходим переход из одной системы координат в другую систему.

Координаты точки в системе $S(\tilde{o}, \acute{o}, z)$ через координаты системы $S_0(\tilde{o}_0, \acute{o}_0, z_0)$ производятся с помощью матричного равенства

$$\bar{r} = A_0 \cdot \bar{r}_0; \bar{r}(x, y, z); \bar{r}_0(x_0, y_0, z_0).$$

Полученные матрицы будем использовать в дальнейшем для получения кинетической и потенциальной энергии и обобщенных сил.

Для нахождения кинетической энергии платформы необходимо выполнить следующие преобразования. Предполагая, что перемещения линейны, а угловые перемещения настолько малы, что величинами второго и более высоких порядков относительно координат и их производных можно пренебречь. Это предположение означает также, что тригонометрические функции углов θ, ψ, ϕ можно заменить первыми членами их разложений в степенные ряды [5].

Центр масс платформы C_1 совпадает с системой координат S_1 , а главные центральные оси – с координатными осями x_1, y_1, z_1 , тогда кинетическая энергия платформы будет равна

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_{o_1}^2 + \frac{1}{2} \left[I_{1x_1} \dot{\theta}^2 + I_{1z_1} (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} + \dot{\phi}^2) \right], \quad (2)$$

где m_1 – масса платформы; $\bar{V}_1$ – скорость центра масс платформы; $I_{1x_1}, I_{1y_1}, I_{1z_1}$ – главные центральные моменты инерции платформы относительно координатных осей x_1, y_1, z_1 .

Для вычисления кинетической энергии T_2 обоймы запишем выражение

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 V_{o_2}^2 + m_2 \bar{V}_{o_2} \bar{V}_{c_2}^{(r)} + T_2', \quad (3)$$

где m_2 – масса обоймы (включая ротор двигателя); $\bar{V}_{o_2}$ – абсолютная скорость полюса O_2 ; $\bar{V}_{c_2}^{(r)}$ – скорость центра масс по отношению к поступательно движущейся системе $S(x, y, z)$ с началом в центре O_2 ; T_2' – кинетическая энергия системы в ее движении относительно поступательно движущейся системы $S(x, y, z)$ с началом в центре O_2 .

После преобразования получим кинетическую энергию T_2 обоймы:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) + m_2 \left\{ x_{2c_2} \dot{\eta} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1) + y_{2c_2} [\dot{\zeta} \dot{\theta} - \dot{\xi} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1)] - z_{2c_2} \dot{\eta} \dot{\theta} \right\} + \frac{1}{2} \left[I_{2x_2} \dot{\theta}^2 + I_{2z_2} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1)^2 - 2I_{2z_2x_2} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1) \dot{\theta} \right]. \quad (4)$$

Определяем кинетическую энергию T_3 тела 3 (ротора) по формуле

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_{o_3}^2 + m_3 \bar{V}_{o_3} \bar{V}_{c_3}^{(r)} + T_3',$$

где V_{o_3} – скорость полюса O_3 ; $\bar{r}_{c_3}(x_{c_3}, y_{c_3}, z_{c_3})$ – радиус-вектор центра масс C_3 в системе осей (x_3, y_3, z_3) , связанных с телом 3; $\omega_{3x_3}, \omega_{3y_3}, \omega_{3z_3}, V_{o_3x_3}, V_{o_3y_3}, V_{o_3z_3}$ – проекции векторов $\bar{\omega}_3$ и $\bar{V}_{o_3}$ в системе осей, связанных с телом 3.

После преобразования получим кинетическую энергию T_3 ротора:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 \left[\dot{\xi}^2 + (\dot{\eta} - l \dot{\theta})^2 + \dot{\zeta}^2 \right] + m_3 \left\{ x_{3c_3} (\dot{\eta} - l \dot{\theta}) (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1) + y_{3c_3} [\dot{\zeta} (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) - \dot{\xi} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1)] + z_{3c_3} (\dot{\eta} - l \dot{\theta}) (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \right\} + \frac{1}{2} \left[I_{3x_3} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 + I_{3z_3} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1)^2 - 2I_{3z_3x_3} (\dot{\psi} + \dot{\phi}_1) (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \right]. \quad (5)$$

Кинетическая энергия всей системы будет равна сумме

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (6)$$

Выражение для кинетической энергии системы с учетом формул (2), (4), (5) запишем в виде

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} m_1 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{1}{2} [A_1 \theta^2 + c_1 (\psi + \phi^2)] + \frac{1}{2} m_2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \\ & + m_2 \{x_{c_2} \eta (\psi + \phi_1) + y_{c_2} [\xi \theta + \xi (\psi + \phi_1)] - z_{c_2} \eta \theta\} + \\ & + \frac{1}{2} [A_2 \theta^2 + c_2 (\psi + \phi_1)^2 - 2F (\psi + \phi_1) \theta] + \frac{1}{2} m_3 [\xi^2 + (\eta - l \cdot \theta)^2 + \zeta^2] + \\ & + m_3 \{x_{c_3} (\eta - l \cdot \theta) (\psi + \phi_1) + y_{c_3} [\xi (\theta + \alpha) - \xi (\psi + \phi_1) - z_{c_3} (\eta - l \cdot \theta) (\alpha + \theta)]\} + \\ & + \frac{1}{2} [A_3 (\theta + \alpha)^2 + c_3 (\psi + \phi_1)^2 - 2F (\psi + \phi_1) (\alpha + \theta)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Для составления дифференциальных уравнений движения системы найдем частные производные от кинетической энергии по обобщенным скоростям.

Далее вычислим потенциальную энергию сил тяжести системы, которая будет складываться из потенциальной энергии тел 1, 2 и 3:

$$\Pi_1 = \Pi(\bar{P}_1) + \Pi(\bar{P}_2) + \Pi(\bar{P}_3), \quad (8)$$

где $\Pi(\bar{P}_1)$, $\Pi(\bar{P}_2)$, $\Pi(\bar{P}_3)$ – соответственно потенциальная энергия платформы, обоймы и ротора.

Определение обобщенных сил упругости проводим следующим образом [6, 7]. Изобразим схему определения обобщенных сил упругости (рис. 2).

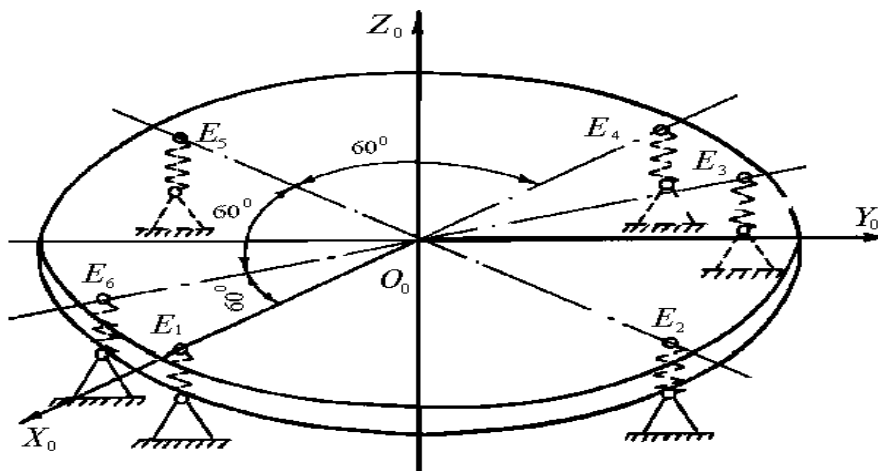


Рис. 2. Схема определения обобщенных сил упругости

Пружины параллельны оси Z_0 . Обозначим для i -й пружины точки E_i координаты ее крепления к твердому телу x_{1i} , y_{1i} , z_{1i} в системе S_1 . Деформации в направлении осей x_0 , y_0 , z_0 обозначим U_i , V_i , W_i , жесткости в направлении этих же осей обозначим k_x^i, k_y^i, k_z^i .

$$\Pi_2 = \frac{k_z}{2} \sum_{i=1}^6 w_i^2 + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^6 (u_i^2 + v_i^2). \quad (9)$$

Определяем координаты точек крепления пружин: $E_1(R, 0, 0)$; $E_2(R \cos 60^\circ, R \cos 30^\circ, 0)$; $E_3(-R \cos 60^\circ, R \cos 30^\circ, 0)$; $E_4(-R, 0, 0)$; $E_5(-R \cos 60^\circ, -R \cos 30^\circ, 0)$; $E_6(R \cos 60^\circ, -R \cos 30^\circ, 0)$.

Находим деформации пружин:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \xi; & v_1 &= \eta + R(\psi + \phi); & w_1 &= \zeta; \\
 u_2 &= \xi - R(\psi + \phi)\cos 30^\circ; & v_2 &= \eta + R(\psi + \phi)\cos 60^\circ; & w_2 &= \zeta + R\theta\cos 30^\circ; \\
 u_3 &= \xi - R(\psi + \phi)\cos 30^\circ; & v_3 &= \eta - R(\psi + \phi)\cos 60^\circ; & w_3 &= \zeta + R\theta\cos 30^\circ; \\
 u_4 &= \xi; & v_4 &= \eta - R(\psi + \phi); & w_4 &= \zeta; \\
 u_5 &= \xi + R(\psi + \phi)\cos 30^\circ; & v_5 &= \eta - R(\psi + \phi)\cos 60^\circ; & w_5 &= \zeta - R\theta\cos 30^\circ; \\
 u_6 &= \xi + R(\psi + \phi)\cos 30^\circ; & v_6 &= \eta + R(\psi + \phi)\cos 60^\circ; & w_6 &= \zeta - R\theta\cos 30^\circ.
 \end{aligned}$$

Потенциальная энергия пружин равна

$$\begin{aligned}
 \Pi_2 &= \frac{1}{2}k_z \left[6\zeta^2 + 4R^2\theta^2 \cos^2 30^\circ \right] + \frac{1}{2}k \left[6\xi^2 + 4R^2(\psi + \phi)^2 \cos 30^\circ + \right. \\
 &\quad \left. + 6\eta^2 + 3R^2(\psi + \phi)^2 \right] \cdot \left[\eta + R(\psi + \phi) \right]^2 + \left[\eta - R(\psi + \phi) \right]^2 + \\
 &= 2 \left[\eta + R(\psi + \phi)\cos 60^\circ \right]^2 + 2 \left[\eta - R(\psi + \phi)\cos 60^\circ \right]^2 = \\
 &= 6\eta^2 + 2R^2(\psi + \phi)^2 + 4R^2(\psi + \phi)^2 \left(\frac{1}{4} \right) = 6\eta^2 + 3R^2(\psi + \phi)^2;
 \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}k_z (6\zeta^2 + 3R^2\theta^2) + \frac{1}{2}k \left[6\xi^2 + 3R^2(\psi + \phi)^2 + 6\eta^2 + 3R^2(\psi + \phi)^2 \right]^2 + \frac{1}{2}C_\alpha \alpha^2;$$

$$\Pi_2 = \frac{3}{2}k_z (2\zeta^2 + R^2\theta^2) + 3k \left[\xi^2 + \eta^2 + R^2(\psi + \phi)^2 \right] + \frac{1}{2}C_\alpha \alpha^2.$$

Находим частные производные (силы упругости):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Pi_2}{\partial \xi} &= -6k\xi; & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \eta} &= -6k\eta; & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \zeta} &= -6k_z\zeta; \\
 \frac{\partial \Pi_2}{\partial \psi} &= -6kR^2(\psi + \phi); & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \theta} &= -3kR^2\theta; & \frac{\partial \Pi_2}{\partial \phi} &= -6kR^2(\psi + \phi); \\
 \frac{\partial \Pi_2}{\partial \alpha} &= -C_\alpha \alpha.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Запишем дифференциальные уравнения движения, подставив зависимости (8), (9), (10) в уравнения Лагранжа второго рода (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_j} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, 7), \tag{11}$$

в которых $\frac{\partial T}{\partial q_j} = 0$, т.е. кинетическая энергия системы не зависит от обобщенных координат.

Уравнения (11) называют дифференциальными уравнениями вынужденных колебаний с семью степенями свободы. Общий интеграл системы дифференциальных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения рассматриваемой неоднородной системы, т.е. [5]

$$q_j = q_j^* + q_j^{**}. \tag{12}$$

Первое решение q_j^* представляет свободные колебания системы, второе решение q_j^{**} определяет вынужденные колебания системы. Определим все частоты свободных колебаний системы $k_j (j = 1, 2, \dots, 7)$.

Введем обозначения и перепишем систему дифференциальных уравнений (11) с учетом обозначений (12):

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\xi} - B_1\ddot{\psi} - B_1\ddot{\phi} + D_1\xi &= \ddot{\phi}_m B_1; \\
 M\ddot{\eta} + B_2\ddot{\psi} + B_2\ddot{\phi} - B_3\ddot{\theta} - B_4\ddot{\alpha} + D_1\eta &= -\ddot{\phi}_m B_2; \\
 M\ddot{\zeta} + B_3\ddot{\theta} + B_5\ddot{\alpha} + D_2\zeta &= 0; \\
 -B_1\ddot{\xi} + B_2\ddot{\eta} + B_6\ddot{\psi} - B_7\ddot{\theta} + B_6\ddot{\phi} - B_8\ddot{\alpha} + D_3\psi + D_3\phi &= -\ddot{\phi}_m B_9; \\
 -B_3\ddot{\eta} + B_1\ddot{\zeta} - B_7\ddot{\psi} + B_{10}\ddot{\theta} - B_7\ddot{\phi} + B_{11}\ddot{\alpha} + D_6\theta + D_4\phi - D_5\alpha &= -\ddot{\phi}_m B_7 - D_4\phi_m; \\
 -B_1\ddot{\xi} + B_2\ddot{\eta} + B_6\ddot{\psi} - B_7\ddot{\theta} + B_6\ddot{\phi} - B_8\ddot{\alpha} + D_3\psi + D_4\theta + D_3\phi &= -\ddot{\phi}_m B_9; \\
 B_5\ddot{\zeta} - B_4\ddot{\eta} - B_8\ddot{\psi} + B_{11}\ddot{\theta} - B_8\ddot{\phi} + B_{12}\ddot{\alpha} + D_7\alpha - D_5\theta &= \ddot{\phi}_m D_8.
 \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем частоты свободных колебаний системы. Общие решения соответствующих уравнений (12) без правой части находим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 q_1 = \xi &= A_1 \sin(kt + \beta) = \mu_1 A_1 \sin(kt + \beta); \\
 q_2 = \eta &= A_2 \sin(kt + \beta) = \mu_2 A_1 \sin(kt + \beta); \\
 q_3 = \zeta &= A_3 \sin(kt + \beta) = \mu_3 A_1 \sin(kt + \beta); \\
 q_4 = \psi &= A_4 \sin(kt + \beta) = \mu_4 A_1 \sin(kt + \beta); \\
 q_5 = \theta &= A_5 \sin(kt + \beta) = \mu_5 A_1 \sin(kt + \beta); \\
 q_6 = \phi &= A_6 \sin(kt + \beta) = \mu_6 A_1 \sin(kt + \beta); \\
 q_7 = \alpha &= A_7 \sin(kt + \beta) = \mu_7 A_1 \sin(kt + \beta),
 \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mu_j = \frac{A_j}{A_1}$ ($j=1, 2, \dots, 7$).

Значения вторых производных равны:

$$\begin{aligned}
 \ddot{q}_1 = \ddot{\xi} &= A_1 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_1 A_1 k^2 \sin(kt + \beta); \\
 \ddot{q}_2 = \ddot{\eta} &= A_2 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_2 A_1 k^2 \sin(kt + \beta); \\
 \ddot{q}_3 = \ddot{\zeta} &= A_3 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_3 A_1 k^2 \sin(kt + \beta); \\
 \ddot{q}_4 = \ddot{\psi} &= A_4 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_4 A_1 k^2 \sin(kt + \beta); \\
 \ddot{q}_5 = \ddot{\theta} &= A_5 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_5 A_1 k^2 \sin(kt + \beta); \\
 \ddot{q}_6 = \ddot{\phi} &= A_6 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_6 A_1 k^2 \sin(kt + \beta); \\
 \ddot{q}_7 = \ddot{\alpha} &= A_7 k^2 \sin(kt + \beta) = -\mu_7 A_1 k^2 \sin(kt + \beta).
 \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя зависимости (14) и (15) в систему дифференциальных уравнений (13) без правой части, получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 (D_1 - k^2 M)\mu_1 + k^2 B_1 \mu_4 + k^2 B_1 \mu_6 &= 0; \\
 (D_2 - k^2 M)\mu_2 - k^2 B_2 \mu_4 + k^2 B_3 \mu_5 - k^2 B_2 \mu_6 + k^2 B_4 \mu_7 &= 0; \\
 (D_3 - k^2 M)\mu_3 - k^2 B_1 \mu_5 - k^2 B_5 \mu_7 &= 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

Система алгебраических уравнений (16), линейных и однородных относительно неизвестных постоянных μ_j ($j=1, 2, \dots, 7$) может иметь решение, отличное от нуля лишь в том случае, если определитель этой системы равен нулю. Из этого условия получаем следующее уравнение частот свободных колебаний системы:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} D_1 - k^2 M & 0 & 0 & k^2 B_1 & 0 & k^2 B_1 & 0 \\ 0 & D_2 - k^2 M & 0 & -k^2 B_2 & k^2 B_3 & -k^2 B_2 & k^2 B_4 \\ 0 & 0 & D_3 - k^2 M & 0 & -k^2 B_1 & 0 & -k^2 B_5 \\ k^2 B_1 & -k^2 B_2 & 0 & D_4 - k^2 B_6 & k^2 B_7 & D_4 - k^2 B_6 & k^2 B_8 \\ 0 & k^2 B_3 & -k^2 B_1 & k^2 B_7 & D_5 - k^2 B_{10} & D_4 + k^2 B_7 & -D_5 - k^2 B_{11} \\ k^2 B_1 & -k^2 B_2 & 0 & D_4 - k^2 B_6 & D_4 + k^2 B_7 & D_6 - k^2 B_6 & k^2 B_8 \\ 0 & k^2 B_4 & -k^2 B_5 & k^2 B_8 & -D_5 - k^2 B_{11} & k^2 B_8 & D_7 - k^2 B_{12} \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является уравнением седьмой степени относительно k^2 ; из этого уравнения определяем все частоты свободных колебаний системы k_j ($j = 1, 2, \dots, 7$), так как k_j^2 – корни уравнения частот.

Определение корней уравнений произведено на ЭВМ при следующих значениях коэффициентов $M, B_1, \dots, B_{12}, D_1, \dots, D_7$:

$$\begin{aligned} M &= (m_1 + m_2 + m_3) = 300 \text{ кг}; \\ B_1 &= (m_2 y_{c_2} + m_3 y_{c_2}) = 0,04 \text{ кгм}; \\ B_2 &= (m_2 x_{c_2} + m_3 x_{c_2}) = 4,36 \text{ кгм}; \\ B_3 &= (m_2 z_{c_2} + m_3 z_{c_3} + m_3 l) = 12,0 \text{ кгм}; \\ B_4 &= m_3 z_{c_3} = 0,04 \text{ кгм}; \\ B_5 &= m_3 y_{c_3} = 0,04 \text{ кгм}; \\ B_6 &= (c_1 + c_2 + c_3) = 21,3 \text{ кгм}^2; \\ B_7 &= (F_2 + F_3 + m_3 x_{c_3} l) = 1,2 \text{ кгм}^2; \\ B_8 &= F_3 = 0,01 \text{ кгм}^2; \\ B_9 &= (c_1 + c_2) = 4,3 \text{ кгм}^2; \\ B_{10} &= (A_1 + A_2 + A_3 + m_3 l^2 + 2m_3 z_{c_3} l) = 9,51 \text{ км}^2; \\ B_{11} &= (A_3 + z_{c_3} l m_3) = 0,04 \text{ кгм}^2; \\ B_{12} &= A_3 = 0,15 \text{ кгм}^2; \\ D_1 &= 50\,000 \text{ Н/м}; D_2 = 50\,000 \text{ Н/м}; D_3 = 8000 \text{ Н/м}; \\ D_4 &= (P_1 x_{c_1} + P_2 x_{c_2} + P_3 x_{c_3}) = 4 \text{ Н/м}; \\ D_5 &= P_3 z_{c_3} \approx 0; \\ D_6 &= 3k_z R^2 = 8000 \text{ Н/м}; \\ D_7 &= c_\alpha = 2000 \text{ Н·м/рад}. \end{aligned} \quad (18)$$

Значения коэффициентов жесткости D_4 и D_6 на несколько порядков меньше, чем значения коэффициентов D_1, D_2, D_3, D_5, D_7 . Вычисление корней определителя (17) показывает, что значения D_4 и D_5 практически не влияют на собственные частоты колебания системы, поэтому примем $D_4 = D_5 = 0$. Тогда определитель (17) будет иметь вид

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} D_1 - k^2 M & 0 & 0 & k^2 B_1 & 0 & k^2 B_1 & 0 \\ 0 & D_2 - k^2 M & 0 & -k^2 B_2 & k^2 B_3 & -k^2 B_2 & k^2 B_4 \\ 0 & 0 & D_3 - k^2 M & 0 & -k^2 B_1 & 0 & -k^2 B_5 \\ k^2 B_1 & -k^2 B_2 & 0 & -k^2 B_6 & k^2 B_7 & -k^2 B_6 & k^2 B_8 \\ 0 & k^2 B_3 & -k^2 B_1 & k^2 B_7 & D_5 - k^2 B_{10} & k^2 B_7 & -k^2 B_{11} \\ k^2 B_1 & -k^2 B_2 & 0 & -k^2 B_6 & k^2 B_7 & -k^2 B_6 & k^2 B_8 \\ 0 & k^2 B_4 & -k^2 B_5 & k^2 B_8 & -k^2 B_{11} & k^2 B_8 & D_7 - k^2 B_{12} \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Анализ определителя показывает, что 4-я и 6-я строки и 4-й и 6-й столбцы одинаковы, следовательно, и уравнения движения по обобщенным координатам φ и ψ будут одинаковыми, что обусловлено: во-первых, линеаризацией дифференциальных уравнений; во-вторых, принятием $D_4 = D_6 = 0$.

На основании сказанного сведем определитель (19) к 6-му порядку (20) путем исключения 6-го столбца и 6-й строки. В этом определителе и дальнейших выкладках значение D_7 заменено на D_6 .

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} D_1 - k^2 M & 0 & 0 & k^2 B_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 - k^2 M & 0 & -k^2 B_2 & k^2 B_3 & -k^2 B_4 \\ 0 & 0 & D_3 - k^2 M & 0 & -k^2 B_1 & -k^2 B_5 \\ k^2 B_1 & -k^2 B_2 & 0 & D_4 - k^2 B_6 & k^2 B_7 & k^2 B_8 \\ 0 & k^2 B_3 & -k^2 B_1 & k^2 B_7 & D_5 - k^2 B_{10} & k^2 B_{11} \\ 0 & k^2 B_4 & -k^2 B_5 & k^2 B_8 & -k^2 B_{11} & D_6 - k^2 B_{12} \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Для надежной и устойчивой работы балансировочного станка необходимо определить собственные частоты $k_1, \dots, k_6$ и исследовать их поведение в зависимости от физических параметров колеблющейся системы.

Параметры системы определяются совокупностью коэффициентов $B_1, \dots, B_{12}$ и $D_1, \dots, D_6$, которые, в свою очередь, зависят от формы, масс и распределения масс тел системы, а именно:

$$m_i, x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}, c_i, A_i \quad (i = 1, \dots, 3), l, F_2, F_3.$$

Наличие большого количества факторов, влияющих на собственные частоты системы, представляет задачу практически невыполнимой. На основании анализа определителя (20) выявлены только те параметры системы, которые существенно влияют на собственные частоты $k_1, \dots, k_6$.

Анализ точного определения значений k_i ($i = 1, \dots, 6$) показывает, что члены, не лежащие на главной диагонали определителя, ввиду их малости практически не влияют на k_i . Поэтому в первом приближении с достаточной для практических расчетов точностью значения k_i можно определить из выражения, представленного произведением главных элементов диагонали определителя (20), т.е.

$$(D_1 - k^2 M)(D_2 - k^2 M)(D_3 - k^2 M)(D_4 - k^2 B_6)(D_5 - k^2 B_{10})(D_6 - k^2 B_{12}) = 0. \quad (21)$$

Откуда получим приближенные значения k'_i :

$$k'_1 = \sqrt{\frac{D_1}{M}}; \quad k'_2 = \sqrt{\frac{D_2}{M}}; \quad k'_3 = \sqrt{\frac{D_3}{M}}; \quad k'_4 = \sqrt{\frac{D_4}{B_6}}; \quad k'_5 = \sqrt{\frac{D_5}{B_{10}}}; \quad k'_6 = \sqrt{\frac{D_6}{B_{12}}}. \quad (22)$$

Из сравнения значений k'_i , приведенных в [5], со значениями, вычисленными по определителю (20), видно, что ошибка приближенного вычисления не превышает 1 %. Анализ пока-

зывает, что существенно влияют на собственные частоты коэффициенты жесткости $D_1, \dots, D_6$. Это влияние отражено в графиках $k_i = f(D_1, \dots, D_6)$.

При этом установлено, что изменение жесткости в направлении одной из обобщенных координат несущественно влияет на собственные частоты по другим обобщенным координатам, что обусловлено сравнительно малыми коэффициентами определителя (20), не лежащими на главной диагонали.

Вторым фактором, влияющим на k_i по приближенным выражениям (22), являются суммарные коэффициенты:

$$M = m_1 + m_2 + m_3;$$

$$B_6 = c_1 + c_2 + c_3;$$

$$B_{10} = A_1 + A_2 + A_3 + m_3 l^2 + 2m_3 z_{c_3} l;$$

$$B_{12} = A_3,$$

увеличение которых ведет к уменьшению собственных частот колебаний системы. Для надежной и устойчивой работы балансировочного станка определены собственные частоты $k_1, \dots, k_6$ и амплитуды вынужденных колебаний колеблющейся системы в зависимости от ее физических параметров. Анализ показывает, что коэффициенты жесткости пружин $D_1, \dots, D_6$ существенно влияют на собственные частоты. Это влияние отражено в графиках $k_i = f(D_1, \dots, D_6)$.

Результаты вычисления амплитуды обобщенных координат приведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчета значений обобщенных координат

$P, 1/c$	$\xi, м$	$\eta, м$	$\zeta, м$	$\varphi_b, рад$	$\theta_b, рад$	$\alpha_b, рад$
20.0000000 0	-0.7088417E-04	0.3410730E-02	-0.2119076E-04	-0.1518960E-00	0.2701907E-01	0.7938468E-03
21.0000000 0	-0.1141215E-04	0.6449048E-03	-0.5049223E-05	-0.6647128E-01	0.68038113E-02	0.2113144E-03
22.0000000 0	0.3036039E-05	-0.2304004E-03	0.2296500E-05	-0.4560277E-01	-0.2982209E-02	-0.1066814E-03
23.0000000 0	0.8227464E-05	-0.1259567E-02	0.1627050E-04	-0.3804761E-01	-0.2126479E-01	-0.8342064E-03
24.0000000 0	0.3498602E-04	0.9740334E-02	-0.1678607E-03	0.9605959E-03	0.2204834E-00	0.9450950E-02
25.0000000 0	0.1956524E-04	0.9704130E-03	-0.2340641E-04	-0.2143470E-01	0.3086028E-01	0.1440610E-02

Анализ полученных графиков α_b позволяет утверждать, что математическое описание модели при принятых допущениях приемлемо. Впервые предложенный способ балансировки роторов методом малых угловых колебаний открывает большие возможности по упрощению контроля их параметров и повышению безопасности.

Рациональные рабочие частоты кинематического возбуждения системы находятся в диапазонах: 11...18 1/с; 25...80 1/с; 155...295 1/с.

Выводы

1. Для обеспечения безопасности роторов предложен научно-методический аппарат, в основе которого лежат разбиение технической системы на характеристические звенья и переход от показателей безопасности к показателям риска, которые в упрощенном виде позволяют определить безопасность всей системы на этапе ее проектирования.

2. Проведен мониторинг образования и контроля динамической неуравновешенности роторов при их изготовлении и ее влияния на поведение ротора в рабочем состоянии.

3. Разработана математическая модель движения неуравновешенного ротора на упругом подвесе, которая позволила с помощью ЭВМ при заданных массово-жесткостных параметрах механической системы определить рабочие характеристики балансировочного оборудования. Правильность результатов исследований подтверждена экспериментальными данными при контроле дисбалансов роторов на действующем макете. Впервые предложенный способ балансировки роторов методом малых угловых колебаний открывает большие возможности по упрощению контроля их параметров и повышению его безопасности.

Список литературы

1. Основы балансировочной техники : в 2 т. / под общ. ред. В. А. Щепетильникова. – М. : Машиностроение, 1975. – 679 с.
2. Использование автоматической подачи уравнивающей массы при балансировке цилиндрических тел вращения / Н. Н. Вершинин, О. Е. Безбородова, Д. П. Грузин // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2014. – № 2 (8). – С. 31–35.
3. Вершинин, Н. Н. Гибкие автоматизированные производства в радиоаппарато- и приборостроении / Н. Н. Вершинин, В. Е. Мячин, В. В. Пузарин // Опыт создания и применения автоматических систем уравнивания деталей и узлов для условий гибкого автоматического производства / под ред. Б. Н. Дендобренко. – Л. : ЛДНТП, Знания, 1984. – С. 57–61.
4. Вершинин, Н. Н. Технологический контроль динамической неуравновешенности артиллерийских снарядов методом малых угловых колебаний / Н. Н. Вершинин. – Пенза : Изд-во ПГУ, 1999. – 148 с.
5. Ганиев, Р. Ф. Колебания твердых тел / Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко. – М. : Наука, 1976. – 432 с.
6. Чуфистов, Е. А. Конструкторско-технологическое повышение надежности подшипниковых узлов коленчатых валов среднеоборотных дизельных двигателей / Е. А. Чуфистов, Н. В. Родайкин, О. Е. Чуфистов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2009. – № 2. – С. 156–165.
7. Брякин, А. Л. Двухкоординатный датчик положения / А. Л. Брякин, В. В. Кожевников, С. В. Кочкин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 4. – С. 225–236.

Вершинин Николай Николаевич

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой техносферной
безопасности,
Пензенский государственный университет
E-mail: nvershinin@yandex.ru

Vershinin Nikolay Nikolaevich

doctor of technical sciences, professor,
head of sub-department of technospheric security,
Penza State University

Безбородова Оксана Евгеньевна

кандидат технических наук, доцент,
заместитель заведующего кафедрой
техносферной безопасности,
Пензенский государственный университет
E-mail: ot@pnzgu.ru

Bezborodova Oksana Evgen'evna

candidate of technical sciences, associate professor,
deputy head of sub-department
of technospheric security,
Penza State University

Грузин Дмитрий Павлович

доцент,
заместитель заведующего кафедрой
техносферной безопасности,
Пензенский государственный университет
E-mail: ot@pnzgu.ru

Gruzin Dmitriy Pavlovich

associate professor,
deputy head of sub-department
of technospheric security,
Penza State University

Авдониная Любовь Александровна

аспирант,
кафедра техносферной безопасности,
Пензенский государственный университет
E-mail: laviks@yandex.ru

Avdonina Lyubov' Aleksandrovna

postgraduate student,
sub-department of technospheric security,
Penza State University

УДК 621.317

Вершинин, Н. Н.

Исследование динамики балансировочного станка для измерения массово-геометрических параметров тел вращения / Н. Н. Вершинин, О. Е. Безбородова, Д. П. Грузин, Л. А. Авдониная // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2014. – № 3 (9). – С. 16–25.