УДК 621.317.2

А. И. Заико

АЛГОРИТМЫ И ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЭРГОДИЧЕСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

A. I. Zaiko

ALGORITHMS AND UNCERTAINTIES IN MEASUREMENTS OF DISTRIBUTIONS CHARACTERISTIC FUNCTIONS OF ERGODIC RANDOM PROCESSES

А н н о т а ц и я. Приведены алгоритмы и погрешности измерений распределений и характеристических функций эргодических случайных процессов аналоговым и цифровым методами. Они получены на основе комплексного подхода к определению погрешностей.

A b s t r a c t. Algorithms and uncertainties in measurements of distributions and characteristic functions of ergodic random processes obtained by analog and digital methods are presented. they are obtained on the basis of the complex approach to uncertainties definition.

К л ю ч е в ы е с л о в а: эргодические случайные процессы, распределения и характеристические функции, алгоритмы измерения, погрешности.

K e y w o r d s: ergodic random processes, distributions and characteristic functions, algorithms of measurement, uncertainties.

Введение

В статье [1] приведены известные и даны новые определения характеристик эргодических случайных процессов. Реальные алгоритмы измерения отличаются от этих определений конечной длительностью $2T$ и погрешностью измерения реализации $x(t)$. Поэтому результатами измерений являются оценки этих характеристик $\langle \bullet \rangle$, неточность которых характеризуется математическими ожиданиями $m_{\delta\bullet}(\bullet)$ и ковариационными функциями $R_{\delta\bullet}(\bullet)$ их погрешностей. Они по-разному учитываются при аналоговых и цифровых измерениях. Так, при аналоговых измерениях погрешность $\delta(t) = \langle x(t) \rangle - x(t)$, где $\langle x(t) \rangle$ – получаемая в результате измерения оценка реализации $x(t)$. При цифровых измерениях длительность измерения дискретна $2nT_0$, где T_0 – шаг равномерной дискретизации; $2n$ – количество таких шагов. Погрешность цифровых измерений $\delta(t_i) = x_{il} - x(t_i)$, где x_{il} – цифровой отсчет; i – номер измерения ($i = -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n$); l – уровень квантования ($l = 1, 2, \ldots, g, \ldots, k, \ldots, q, \ldots, r, \ldots$) [2, 3].

В данной статье приводятся алгоритмы аналоговых и цифровых измерений распределений и характеристических функций, получены математические ожидания и корреляционные функции погрешностей этих алгоритмов с применением комплексного подхода к их определению [2–5].

Распределения и характеристические функции

Оценка одномерного распределения вероятности

$$\left\langle W_1[X]\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{X}\left\langle w_1[Z]\right\rangle dZ = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} W_1\left[X\left|\left\langle x(t)\right\rangle\right.\right] dt = \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0} W_1\left[X\left|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]dt.$$

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_1, X_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}(X) = \int\limits_{-\infty}^{X} m_{\delta w}(Z)dZ = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{W_1\left[X\left|\left\langle x(t)\right\rangle\right.\right] - W_1[X]\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{W_1\left[X\left|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right] - W_1[X]\right\}dt;$$

$$R_{\delta W}(X_1, X_2) = \int\limits_{-\infty}^{X_1}\int\limits_{-\infty}^{X_2} R_{\delta w}(Z_1, Z_2)dZ_1 dZ_2 =$$

$$= \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{W_2\left[X_1, X_2\left|\left\langle x(t_1)\right\rangle, \left\langle x(t_2)\right\rangle\right.\right] - W_1\left[X_1\left|\left\langle x(t_1)\right\rangle\right.\right]W_1\left[X_2\left|\left\langle x(t_2)\right\rangle\right.\right]\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{4n^2T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-1}\sum_{u=-n}^{n-1}\int\limits_{i=-n}^{n-1}\int\limits_{u=-n}^{n-1}\left\{W_2\left[X_1, X_2\left|t_1, t_2; x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right] -\right.$$

$$\left. - W_1\left[X_1\left|t_1; x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]W_1\left[X_2\left|t_2; x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]\right\}dt,$$

где $W_1\left[X\left|\bullet\right.\right]$ и $W_2\left[X_1, X_2\left|\bullet\right.\right]$ – одномерное и двумерное распределения вероятностей при известной оценке реализации, которая при аналоговых измерениях получается непосредственно, а при цифровых измерениях находится после восстановления ее по дискретным отсчетам $x_{-nk},...,x_{nr}$.

Оценка двумерного распределения вероятности:

$$\left\langle W_2[X_1; X_2, \tau]\right\rangle = \int\limits_{-\infty}^{X_1}\int\limits_{-\infty}^{X_2}\left\langle w_2[Z_1; Z_2, \tau]\right\rangle dZ_1 dZ_2 = \frac{1}{2T - |\tau|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau|} W_2\left[X_1, X_2\left|\left\langle x(t)\right\rangle, \left\langle x(t+|\tau|)\right\rangle\right.\right] dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0} W_2\left[X_1, X_2\left|t, t+|\tau|; x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right] dt,$$

где μ – целая часть частного $|\tau|/T_0$.

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X_1; X_2, \tau)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_{11}; X_{21}, \tau_1; X_{12}; X_{22}, \tau_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}(X_1; X_2, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{X_1}\int\limits_{-\infty}^{X_2} m_{\delta w}(Z_1; Z_2, \tau)dZ_1 dZ_2 =$$

$$= \frac{1}{2T - |\tau|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau|}\left\{W_2\left[X_1, X_2\left|\left\langle x(t)\right\rangle, \left\langle x(t+|\tau|)\right\rangle\right.\right] - W_2[X_1; X_2, \tau]\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{W_2\left[X_1, X_2\left|t, t+|\tau|; x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right] - W_2[X_1; X_2, \tau]\right\} dt;$$

$$R_{\delta W}\left(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2\right)=\int\limits_{-\infty}^{X_{11}}\int\limits_{-\infty}^{X_{21}}\int\limits_{-\infty}^{X_{12}}\int\limits_{-\infty}^{X_{22}}R_{\delta w}\left(Z_{11};Z_{21},\tau_1;Z_{12};Z_{22},\tau_2\right)dZ_{11}dZ_{21}dZ_{12}dZ_{22}=$$

$$=\frac{1}{\left(2T-|\tau_1|\right)\left(2T-|\tau_2|\right)}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_1|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_2|}\Big\{W_4\Big[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\Big|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x\left(t_1+|\tau_1|\right)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2+|\tau_2|\right)\right\rangle\Big]-$$

$$-W_2\Big[X_{11},X_{21}\Big|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x\left(t_1+|\tau_1|\right)\right\rangle\Big]W_2\Big[X_{12},X_{22}\Big|\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2+|\tau_2|\right)\right\rangle\Big]\Big\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\int\limits_{t_u}^{t_u+T_0}\Big\{W_4\Big[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\Big|t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]-$$

$$-W_2\Big[X_{11},X_{21}\Big|t_1,t_1+|\tau_1|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]W_2\Big[X_{12},X_{22}\Big|t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]\Big\}dt_1dt_2,$$

где $W_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\middle|\bullet\right]$ – четырехмерное распределение вероятностей при известной оценке реализации.

Оценка n-мерного распределения вероятности:

$$\left\langle W_n\left[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right]\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{X_1}...\int\limits_{-\infty}^{X_n}\left\langle w_n\left[Z_1;Z_2,\tau_{12};...;Z_n,\tau_{1n}\right]\right\rangle dZ_1...dZ_n=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}W_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle x\left(t+|\tau_{12}|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t+|\tau_{1n}|\right)\right\rangle\Big]dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}W_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|t,t+|\tau_{12}|,...,t+|\tau_{1n}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]dt,$$

где $W_n\left[X_1,X_2,...,X_n\middle|\bullet\right]$ – n-мерное условное распределение вероятностей.

Математическое ожидание $m_{\delta W}\left(X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}\left(X_{11};X_{21},\tau_{12\cdot1};...;X_{n1},\tau_{1n\cdot1};X_{12};X_{22},\tau_{12\cdot2};...;X_{n2},\tau_{1n\cdot2}\right)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}\left(X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right)=\int\limits_{-\infty}^{X_1}...\int\limits_{-\infty}^{X_n}m_{\delta w}\left(Z_1;Z_2,\tau_{12};...;Z_n,\tau_{1n}\right)dZ_1...dZ_n=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\left\{\begin{array}{r}W_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle x\left(t+|\tau_{12}|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t+|\tau_{1n}|\right)\right\rangle\Big]-\\-W_n\left[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right]\end{array}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{array}{r}W_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|t,t+|\tau_{12}|,...,t+|\tau_{1n}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]-\\-W_n\left[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right]\end{array}\right\}dt;$$

$$R_{\delta W}\left(X_{11};X_{21},\tau_{12\cdot1};...;X_{n1},\tau_{1n\cdot1};X_{12};X_{22},\tau_{12\cdot2};...;X_{n2},\tau_{1n\cdot2}\right)=\int\limits_{-\infty}^{X_{11}}...\int\limits_{-\infty}^{X_{n1}}\int\limits_{-\infty}^{X_{12}}...\int\limits_{-\infty}^{X_{n2}}\times$$

$$\times R_{\delta w}\left(Z_{11};Z_{21},\tau_{12\cdot1};..;Z_{n1},\tau_{1n\cdot1};Z_{12};Z_{22},\tau_{12\cdot2};..;Z_{n2},\tau_{1n\cdot2}\right)dZ_{11}..dZ_{n1}dZ_{12}..dZ_{n2}=$$

$$=\frac{1}{\left(2T-|\tau_{1n\cdot1}|\right)\left(2T-|\tau_{1n\cdot2}|\right)}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot1}|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot2}|}\Big\{W_{2n}\Big[X_{11},X_{21},...,X_{n1},X_{12},X_{22},...,X_{n2}\Big|$$

$$\Big|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x\left(t_1+|\tau_{12\cdot1}|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_1+|\tau_{1n\cdot1}|\right)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2+|\tau_{12\cdot2}|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_2+|\tau_{1n\cdot2}|\right)\right\rangle\Big]-$$

$$-W_n\Big[X_{11},X_{21},..,X_{n1}\Big|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x\left(t_1+|\tau_{12\cdot1}|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_1+|\tau_{1n\cdot1}|\right)\right\rangle\Big]\times$$

$$\times W_n\Big[X_{12},X_{22},..,X_{n2}\Big|\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2+|\tau_{12\cdot2}|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_2+|\tau_{1n\cdot2}|\right)\right\rangle\Big]\Big\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n\cdot 1})(2n-\mu_{1n\cdot 2})T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n\cdot 1}-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_{1n\cdot 2}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\Big\{W_{2n}\Big[X_{11},X_{21},...,X_{n1},X_{12},X_{22},...,X_{n2}\Big|$$

$$\Big|t_1,t_1+|\tau_{12\cdot 1}|,...,t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|,t_2,t_2+|\tau_{12\cdot 2}|,...,t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]-$$

$$-W_n\Big[X_{11},X_{21},..,X_{n1}\Big|t_1,t_1+|\tau_{12\cdot 1}|,t_1+|\tau_{1n\cdot 1}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]\times$$

$$\times W_n\Big[X_{12},X_{22},..,X_{n2}\Big|t_2,t_2+|\tau_{12\cdot 2}|,t_2+|\tau_{1n\cdot 2}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]\Big\}dt_1dt_2,$$

где $W_{2n}\left[X_{11},X_{21},...,X_{n1},X_{12},X_{22},...,X_{n2}|\bullet\right]$ – $2n$-мерное условное распределение вероятностей; $|\tau_{12}|\le|\tau_{13}|\le...\le|\tau_{1n}|$; $\mu_{12}\le\mu_{13}\le...\le\mu_{1n}$

Оценка двумерного взаимного распределения вероятности совместно эргодических процессов:

$$\left\langle W_2[X;Y,\tau]\right\rangle=\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y}\left\langle w_2[Z;H,\tau]\right\rangle dZdH=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}W_2\Big[X,Y\Big|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle y(t+|\tau|)\right\rangle\Big]\,dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}W_2\Big[X,Y\Big|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\Big]\,dt,$$

где $\left\langle w_2(Z;H,\tau)\right\rangle$ – оценка двумерной плотности вероятности; $W_2\left[X,Y|\bullet\right]$ – двумерное условное взаимное распределение вероятностей.

Математическое ожидание $m_{\delta W}(X;Y,\tau)$ и корреляционная функция $R_{\delta W}(X_1;Y_2,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta W}(X;Y,\tau)=\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y}m_{\delta w}(Z;H,\tau)dZdH=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\Big\{W_2\Big[X,Y\Big|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle y(t+|\tau|)\right\rangle\Big]-W_2[X;Y,\tau]\Big\}\,dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\Big\{W_2\Big[X,Y\Big|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\Big]-W_2[X;Y,\tau]\Big\}\,dt;$$

$$R_{\delta W}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)=\int_{-\infty}^{X_1}\int_{-\infty}^{Y_1}\int_{-\infty}^{X_2}\int_{-\infty}^{Y_2}R_{\delta w}(Z_1;H_1,\tau_1;Z_2;H_2,\tau_2)dZ_1dH_1dZ_2dH_2=$$

$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\Big\{W_4\Big[X_1,Y_1,X_2,Y_2\Big|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle y(t_1+|\tau_1|)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle y(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\Big]-$$

$$-W_2\Big[X_1,Y_1\Big|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle y(t_1+|\tau_1|)\right\rangle\Big]W_2\Big[X_2,Y_2\Big|\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle y(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\Big]\Big\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{W_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]-\right.$$

$$\left.-W_2\left[X_1,Y_1\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]W_2\left[X_2,Y_2\left|\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]\right\}dt_1dt_2,$$

где $W_2\left[X,Y|\bullet\right]$ и $W_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2|\bullet\right]$ – двумерное и четырехмерное условные распределения вероятностей.

Оценка одномерной плотности вероятности:

$$\left\langle w_1[X]\right\rangle = \frac{d\left\langle W_1[X]\right\rangle}{dX} = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T} w_1\left[X\middle|\left\langle x(t)\right\rangle\right]dt = \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0} w_1\left[X\middle|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right]dt.$$

Математическое ожидание $m_{\delta w}(X)$ и корреляционная функция $R_{\delta w}(X_1,X_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta w}(X) = \frac{dm_{\delta W}(X)}{dX} = \frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{w_1\left[X\middle|\left\langle x(t)\right\rangle\right] - w_1[X]\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{w_1\left[X\middle|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right] - w_1[X]\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_1,X_2) = \frac{d^2R_{\delta W}(X_1,X_2)}{dX_1dX_2} = \frac{1}{4T^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left\{w_2\left[X_1,X_2\middle|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle\right] -\right.$$

$$\left. - w_1\left[X_1\middle|\left\langle x(t_1)\right\rangle\right]w_1\left[X_2\middle|\left\langle x(t_2)\right\rangle\right]\right\}dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{4n^2T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-1}\sum_{u=-n}^{n-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\int\limits_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{w_2\left[X_1,X_2\middle|t_1,t_2;x_{-nk},...,x_{nr}\right] -\right.$$

$$\left. - w_1\left[X_1\middle|t_1;x_{-nk},...,x_{nr}\right]w_1\left[X_2\middle|t_2;x_{-nk},...,x_{nr}\right]\right\}dt_1dt_2,$$

где $w_1\left[X\middle|\bullet\right]$ и $w_2\left[X_1,X_2\middle|\bullet\right]$ – одномерное и двумерное условные плотности распределения вероятностей.

Оценка двумерной плотности распределения вероятности:

$$\left\langle w_2[X_1;X_2,\tau]\right\rangle = \frac{d^2\left\langle W_2[X_1;X_2,\tau]\right\rangle}{dX_1dX_2} = \frac{1}{2T-|\tau|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau|} w_2\left[X_1,X_2\middle|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle x(t+|\tau|)\right\rangle\right]dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0} w_2\left[X_1,X_2\middle|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr}\right]dt.$$

Математическое ожидание $m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau)$ и корреляционная функция $R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)$ ее погрешности:

$$m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau) = \frac{d^2m_{\delta W}(X_1;X_2,\tau)}{dX_1dX_2} = \frac{1}{2T-|\tau|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau|}\left\{w_2\left[X_1,X_2\middle|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle x(t+|\tau|)\right\rangle\right] - w_2[X_1;X_2,\tau]\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{w_2\left[X_1,X_2\middle|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr}\right] - w_2[X_1;X_2,\tau]\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2) = \frac{d^4R_{\delta W}(X_{11};X_{21},\tau_1;X_{12};X_{22},\tau_2)}{dX_{11}dX_{21}dX_{12}dX_{22}} =$$

$$= \frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_1|}\int\limits_{-T}^{T-|\tau_2|}\left\{w_4\left[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\middle|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x(t_1+|\tau_1|)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle x(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\right] -\right.$$

$$\left. - w_2\left[X_{11},X_{21}\middle|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x(t_1+|\tau_1|)\right\rangle\right]w_2\left[X_{12},X_{22}\middle|\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle x(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\right]\right\}dt_1dt_2 =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\Big\{w_4\Big[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\Big|t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]-$$

$$-w_2\Big[X_{11},X_{21}\Big|t_1,t_1+|\tau_1|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]w_2\Big[X_{12},X_{22}\Big|t_2,t_2+|\tau_2|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]\Big\}dt_1dt_2,$$

где $w_4\big[X_{11},X_{21},X_{12},X_{22}\big|\bullet\big]$ – четырехмерная условная плотность распределения вероятностей.

Оценка n-мерной плотности распределения вероятности, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\big\langle w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]\big\rangle=\frac{d^n\big\langle W_1[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]\big\rangle}{dX_1...dX_n}=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}w_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|\big\langle x(t)\big\rangle,\big\langle x(t+|\tau_{12}|)\big\rangle,...,\big\langle x(t+|\tau_{1n}|)\big\rangle\Big]dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}w_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|t,t+|\tau_{12}|,...,t+|\tau_{1n}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]dt;$$

$$m_{\delta w}(X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n})=\frac{d^n m_{\delta W}(X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n})}{dX_1...dX_n}=$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau_{1n}|}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n}|}\left\{\begin{aligned}&w_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|\big\langle x(t)\big\rangle,\big\langle x(t+|\tau_{12}|)\big\rangle,...,\big\langle x(t+|\tau_{1n}|)\big\rangle\Big]-\\&-w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]\end{aligned}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n})T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\begin{aligned}&w_n\Big[X_1,X_2,...,X_n\Big|t,t+|\tau_{12}|,...,t+|\tau_{1n}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]-\\&-w_n[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}]\end{aligned}\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_{11};X_{21},\tau_{12\cdot1};...;X_{n1},\tau_{1n\cdot1};X_{12};X_{22},\tau_{12\cdot2};...;X_{n2},\tau_{1n\cdot2})=$$

$$=\frac{d^{2n}R_{\delta W}(X_{11};X_{21},\tau_{12\cdot1};...;X_{n1},\tau_{1n\cdot1};X_{12};X_{22},\tau_{12\cdot2};...;X_{n2},\tau_{1n\cdot2})}{dX_{11}...dX_{n1}dX_{12}...dX_{n2}}=$$

$$=\frac{1}{(2T-|\tau_{1n\cdot1}|)(2T-|\tau_{1n\cdot2}|)}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot1}|}\int_{-T}^{T-|\tau_{1n\cdot2}|}\Big\{w_{2n}\Big[X_{11},X_{21},...,X_{n1},X_{12},X_{22},...,X_{n2}\Big|$$

$$\Big|\big\langle x(t_1)\big\rangle,\big\langle x(t_1+|\tau_{12\cdot1}|)\big\rangle,...,\big\langle x(t_1+|\tau_{1n\cdot1}|)\big\rangle,\big\langle x(t_2)\big\rangle,\big\langle x(t_2+|\tau_{12\cdot2}|)\big\rangle,...,\big\langle x(t_2+|\tau_{1n\cdot2}|)\big\rangle\Big]-$$

$$-w_n\Big[X_{11},X_{21},...,X_{n1}\Big|\big\langle x(t_1)\big\rangle,\big\langle x(t_1+|\tau_{12\cdot1}|)\big\rangle,...,\big\langle x(t_1+|\tau_{1n\cdot1}|)\big\rangle\Big]\times$$

$$\times w_n\Big[X_{12},X_{22},...,X_{n2}\Big|\big\langle x(t_2)\big\rangle,\big\langle x(t_2+|\tau_{12\cdot2}|)\big\rangle,...,\big\langle x(t_2+|\tau_{1n\cdot2}|)\big\rangle\Big]\Big\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_{1n\cdot1})(2n-\mu_{1n\cdot2})T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n\cdot1}-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_{1n\cdot2}-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\Big\{w_{2n}\Big[X_{11},X_{21},...,X_{n1},X_{12},X_{22},...,X_{n2}\Big|$$

$$\Big|t_1,t_1+|\tau_{12\cdot1}|,...,t_1+|\tau_{1n\cdot1}|,t_2,t_2+|\tau_{12\cdot2}|,...,t_2+|\tau_{1n\cdot2}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]-$$

$$-w_n\Big[X_{11},X_{21},..,X_{n1}\Big|t_1,t_1+|\tau_{12\cdot1}|,t_1+|\tau_{1n\cdot1}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]\times$$

$$\times w_n\Big[X_{12},X_{22},..,X_{n2}\Big|t_2,t_2+|\tau_{12\cdot2}|,t_2+|\tau_{1n\cdot2}|;x_{-nk},...,x_{nr}\Big]\Big\}dt_1dt_2,$$

где $w_n\big[X_1,X_2,...,X_n\big|\bullet\big]$ и $w_{2n}\big[X_{11},X_{21},...,X_{n1},X_{12},X_{22},...,X_{n2}\big|\bullet\big]$ – n-мерная и $2n$-мерная условные плотности распределения вероятности; $|\tau_{12}|\le|\tau_{13}|\le...\le|\tau_{1n}|$; $\mu_{12}\le\mu_{13}\le...\le\mu_{1n}$.

Оценка двумерной взаимной плотности распределения вероятности совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\left\langle w_2[X;Y,\tau]\right\rangle = \frac{d^2\left\langle W_1[X_1;Y,\tau]\right\rangle}{dXdY} = \frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|} w_2\left[X,Y\left|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle y(t+|\tau|)\right\rangle\right.\right]dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0} w_2\left[X,Y\left|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\right.\right]dt;$$

$$m_{\delta w}(X;Y,\tau) = \frac{d^2 m_{\delta W}(X;Y,\tau)}{dXdY} = \frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{w_2\left[X,Y\left|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle y(t+|\tau|)\right\rangle\right.\right] - w_2[X;Y,\tau]\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{w_2\left[X,Y\left|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\right.\right] - w_2[X;Y,\tau]\right\}dt;$$

$$R_{\delta w}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2) = \frac{d^4 R_{\delta W}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)}{dX_1dY_1dX_2dY_2} = \frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\times$$

$$\times\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_2|}\left\{w_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\left|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle y(t_1+|\tau_1|)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle y(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\right.\right]-\right.$$

$$\left.-w_2\left[X_1,Y_1\left|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle y(t_1+|\tau_1|)\right\rangle\right.\right] w_2\left[X_2,Y_2\left|\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle y(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\right.\right]\right\}dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{w_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]-\right.$$

$$\left.-w_2\left[X_1,Y_1\left|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\ x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]w_2\left[X_2,Y_2\left|\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\ x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right.\right]\right\}dt_1dt_2,$$

где $w_2\left[X,Y\left|\bullet\right.\right]$ и $w_4\left[X_1,Y_1,X_2,Y_2\left|\bullet\right.\right]$ – условные плотности вероятностей.

Оценка одномерной характеристической функции и характеристики ее погрешности соответственно:

$$\left\langle\theta_1[j\nu]\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left\langle w_1[X]\right\rangle e^{j\nu X}dX = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\theta_1\left[j\nu\left|\left\langle x(t)\right\rangle\right.\right]dt = \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\theta_1\left[j\nu\left|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]dt;$$

$$m_{\delta\theta}(j\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{\delta w}(X)e^{j\nu X}dX = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left\{\theta_1\left[j\nu\left|\left\langle x(t)\right\rangle\right.\right] - \theta_1[j\nu]\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{2nT_0}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\theta_1\left[j\nu\left|t;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right] - \theta_1[j\nu]\right\}dt\ ;$$

$$R_{\delta\theta}(j\nu_1,j\nu_2) = \int\int_{-\infty}^{\infty} R_{\delta w}(X_1,X_2)e^{j(\nu_1X_1+\nu_2X_2)}dX_1dX_2 =$$

$$= \frac{1}{4T^2}\int\int_{-T}^{T}\left\{\theta_2\left[j\nu_1,j\nu_2\left|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle\right.\right] - \theta_1\left[j\nu_1\left|\left\langle x(t_1)\right\rangle\right.\right]\theta_1\left[j\nu_2\left|\left\langle x(t_2)\right\rangle\right.\right]\right\}dt_1dt_2 =$$

$$= \frac{1}{4n^2T_0^2}\int\int_{-T}^{T}\left\{\theta_2\left[j\nu_1,j\nu_2\left|t_1,t_2;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right] - \theta_1\left[j\nu_1\left|t_1;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]\theta_1\left[j\nu_2\left|t_2;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]\right\}dt_1dt_2.$$

где $\theta_1\left[j\nu\left|\bullet\right.\right]$ и $\theta_2\left[j\nu_1,j\nu_2\left|\bullet\right.\right]$ – условные характеристические функции.

Оценка n-мерной характеристической функции, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\left\langle \theta_n\left[j\nu_1; j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}\right]\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\langle w_n\left[X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right]\right\rangle e^{j\left(\nu_1X_1+\nu_2X_2+...+\nu_nX_n\right)}dX_1...dX_n=$$

$$=\frac{1}{2T-\left|\tau_{1n}\right|}\int\limits_{-T}^{T-\left|\tau_{1n}\right|}\theta_n\left[j\nu_1,j\nu_2,...,j\nu_n\left|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle x\left(t+\left|\tau_{12}\right|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t+\left|\tau_{1n}\right|\right)\right\rangle\right.\right]dt=$$

$$=\frac{1}{\left(2n-\mu_{1n}\right)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\theta_n\left[j\nu_1,j\nu_2,...,j\nu_n\left|t,t+\left|\tau_{12}\right|,...,t+\left|\tau_{1n}\right|;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]dt;$$

$$m_{\delta\theta}\left(j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}m_{\delta w}\left(X_1;X_2,\tau_{12};...;X_n,\tau_{1n}\right)e^{j\left(\nu_1X_1+\nu_2X_2+...+\nu_nX_n\right)}dX_1...dX_n=$$

$$=\frac{1}{2T-\left|\tau_{1n}\right|}\int\limits_{-T}^{T-\left|\tau_{1n}\right|}\left\{\begin{aligned}&\theta_n\left[j\nu_1,j\nu_2,...,j\nu_n\left|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle x\left(t+\left|\tau_{12}\right|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t+\left|\tau_{1n}\right|\right)\right\rangle\right.\right]-\\&\qquad\qquad-\theta_n\left[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}\right]\end{aligned}\right\}dt=$$

$$=\frac{1}{\left(2n-\mu_{1n}\right)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\theta_n\left[j\nu_1,j\nu_2,...,j\nu_n\left|t,t+\left|\tau_{12}\right|,...,t+\left|\tau_{1n}\right|;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]-\right.$$

$$\left.-\theta_n\left[j\nu_1;j\nu_2,\tau_{12};...;j\nu_n,\tau_{1n}\right]\right\}dt;$$

$$R_{\delta\theta}\left(j\nu_{11};j\nu_{21},\tau_{12\cdot1};...;j\nu_{n1},\tau_{1n\cdot1};j\nu_{12};j\nu_{22},\tau_{12\cdot2};...;j\nu_{n2},\tau_{1n\cdot2}\right)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}R_{\delta w}\left(X_{11};X_{21},\tau_{12\cdot1};...;X_{n1},\tau_{1n\cdot1};X_{12};X_{22},\tau_{12\cdot2};...;X_{n2},\tau_{1n\cdot2}\right)\times$$

$$\times e^{j\left(\nu_{11}X_{11}+\nu_{21}X_{21}+\cdots+\nu_{n1}X_{n1}+\nu_{12}X_{12}+\nu_{22}X_{22}+\cdots+\nu_{n2}X_{n2}\right)}dX_{11}...dX_{n1}dX_{12}...dX_{n2}=$$

$$=\frac{1}{\left(2T-\left|\tau_{1n\cdot1}\right|\right)\left(2T-\left|\tau_{1n\cdot2}\right|\right)}\int\limits_{-T}^{T-\left|\tau_{1n\cdot1}\right|}\int\limits_{-T}^{T-\left|\tau_{1n\cdot2}\right|}\left\{\theta_{2n}\left[j\nu_{11},j\nu_{21},...,j\nu_{n1},j\nu_{12},j\nu_{22},...,j\nu_{n2}\right|\right.$$

$$\left|\left\langle x\left(t_1\right)\right\rangle,\left\langle x\left(t_1+\left|\tau_{12\cdot1}\right|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_1+\left|\tau_{1n\cdot1}\right|\right)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2\right)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2+\left|\tau_{12\cdot2}\right|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_2+\left|\tau_{1n\cdot2}\right|\right)\right\rangle\right]-$$

$$-\theta_n\left[j\nu_{11},j\nu_{21},...,j\nu_{n1}\left|\left\langle x\left(t_1\right)\right\rangle,\left\langle x\left(t_1+\left|\tau_{12\cdot1}\right|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_1+\left|\tau_{1n\cdot1}\right|\right)\right\rangle\right.\right]\times$$

$$\left.\times\theta_n\left[j\nu_{12},j\nu_{22},...,j\nu_{n2}\left|\left\langle x\left(t_2\right)\right\rangle,\left\langle x\left(t_2+\left|\tau_{12\cdot2}\right|\right)\right\rangle,...,\left\langle x\left(t_2+\left|\tau_{1n\cdot2}\right|\right)\right\rangle\right.\right]\right\}dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{\left(2n-\mu_{1n\cdot1}\right)\left(2n-\mu_{1n\cdot2}\right)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_{1n\cdot1}-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_{1n\cdot2}-1}\int\limits_{t_i}^{t_i+T_0}\int\limits_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{\theta_{2n}\left[j\nu_{11},j\nu_{21},...,j\nu_{n1},j\nu_{12},j\nu_{22},...,j\nu_{n2}\right|\right.$$

$$\left|t_1,t_1+\left|\tau_{12\cdot1}\right|,...,t_1+\left|\tau_{1n\cdot1}\right|,t_2,t_2+\left|\tau_{12\cdot2}\right|,...,t_2+\left|\tau_{1n\cdot2}\right|;x_{-nk},...,x_{nr}\right]-$$

$$-\theta_n\left[j\nu_{11},j\nu_{21},...,j\nu_{n1}\left|t_1,t_1+\left|\tau_{12\cdot1}\right|,...,t_1+\left|\tau_{1n\cdot1}\right|;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]\times$$

$$\left.\times\theta_n\left[j\nu_{12},j\nu_{22},...,j\nu_{n2}\left|t_2,t_2+\left|\tau_{12\cdot2}\right|,...,t_2+\left|\tau_{1n\cdot2}\right|;x_{-nk},...,x_{nr}\right.\right]\right\}dt_1dt_2,$$

где $\theta_n\left[j\nu_{11},j\nu_{21},...,j\nu_{n1}\left|\bullet\right.\right]$ и $\theta_{2n}\left[j\nu_{11},j\nu_{21},...,j\nu_{n1},j\nu_{12},j\nu_{22},...,j\nu_{n2}\left|\bullet\right.\right]$ – n-мерные и $2n$-мерные условные характеристические функции.

Оценка двумерной взаимной характеристической функции совместно эргодических процессов, математическое ожидание и корреляционная функция ее погрешности:

$$\left\langle \theta_2\left[j\nu; j\eta,\tau\right]\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left\langle w_2\left[X;Y,\tau\right]\right\rangle e^{j(\nu X+\eta Y)}dXdY =$$

$$=\frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\theta_2\left[j\nu, j\eta\middle|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle y(t+|\tau|)\right\rangle\right]dt =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\theta_2\left[j\nu, j\eta\middle|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\right]dt;$$

$$m_{\delta\theta}(j\nu; j\eta,\tau) =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}m_{\delta w}(X;Y,\tau)e^{j(\nu X+\eta Y)}dXdY = \frac{1}{2T-|\tau|}\int_{-T}^{T-|\tau|}\left\{\theta_2\left[j\nu, j\eta\middle|\left\langle x(t)\right\rangle,\left\langle y(t+|\tau|)\right\rangle\right]-\theta_2\left[j\nu, j\eta,\tau\right]\right\}dt =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu)T_0}\sum_{i=-n}^{n-\mu-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\left\{\theta_2\left[j\nu, j\eta\middle|t,t+|\tau|;x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\right]-\theta_2\left[j\nu, j\eta,\tau\right]\right\}dt;$$

$$R_{\delta\theta}(j\nu_1; j\eta_1,\tau_1; j\nu_2; j\eta_2,\tau_2) =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{\delta w}(X_1;Y_1,\tau_1;X_2;Y_2,\tau_2)e^{j(\nu_1X_1+\eta_1Y_1+\nu_2X_2+\eta_2Y_2)}dX_1dY_1dX_2dY_2 =$$

$$=\frac{1}{(2T-|\tau_1|)(2T-|\tau_2|)}\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\int_{-T}^{T-|\tau_1|}\left\{\theta_4\left[j\nu_1, j\eta_1, j\nu_2, j\eta_2\middle|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle y(t_1+|\tau_1|)\right\rangle,\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle y(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\right]-\right.$$

$$\left.-\theta_2\left[j\nu_1, j\eta_1\middle|\left\langle x(t_1)\right\rangle,\left\langle y(t_1+|\tau_1|)\right\rangle\right]\theta_2\left[j\nu_2, j\eta_2\middle|\left\langle x(t_2)\right\rangle,\left\langle y(t_2+|\tau_2|)\right\rangle\right]\right\}dt_1dt_2 =$$

$$=\frac{1}{(2n-\mu_1)(2n-\mu_2)T_0^2}\sum_{i=-n}^{n-\mu_1-1}\sum_{u=-n}^{n-\mu_2-1}\int_{t_i}^{t_i+T_0}\int_{t_u}^{t_u+T_0}\left\{\theta_4\left[j\nu_1, j\eta_1, j\nu_2, j\eta_2\middle|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|,t_2,t_2+|\tau_2|;\\x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right]-\right.$$

$$\left.-\theta_2\left[j\nu_1, j\eta_1\middle|\begin{matrix}t_1,t_1+|\tau_1|;\\x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right]\theta_2\left[j\nu_2, j\eta_2\middle|\begin{matrix}t_2,t_2+|\tau_2|;\\x_{-nk},...,x_{nr},y_{-ng},...,y_{nq}\end{matrix}\right]\right\}dt_1dt_2.$$

Выводы

Полученные на основе комплексного подхода математические ожидания и корреляционные функции погрешностей результатов измерений позволяют адекватно, во взаимодействии между собой, учесть влияние конечной длительности и погрешностей реализации для аналоговых и цифровых измерений распределений и характеристических функций случайных процессов. Они исключают некорректное суммирование этих элементарных погрешностей.

Список литературы

1. Заико, А. И. Определения характеристик эргодических случайных процессов / А. И. Заико // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2012. – № 2. – С. 30–34.
2. Заико, А. И. Случайные процессы. Модели и измерения : учеб. пособие / А. И. Заико. – М. : Изд-во МАИ, 2006. – 297 с.
3. Заико, А. И. Эргодические случайные процессы. Определения и алгоритмы измерения характеристик / А. И. Заико // Вестник УГАТУ. – 2012. – Т. 16, № 6 (51). – С. 74–85.
4. Заико, А. И. Комплексный подход к определению погрешностей / А. И. Заико // Датчики и системы (ИКА). – 2007. – № 8 (99). – С. 52–59.
5. Zaiko, A. I. Accuracy of statistic and spectral Measurements / A. I. Zaiko, N. A. Zaiko // Proceedings XVII IMEKO World Congress «Metrology in the 3rd Millenium». – Dubrovnik : Croatia, 2003. – P. 1275–1279.

Заико Александр Иванович
доктор технических наук, профессор,
кафедра теоретических основ электротехники,
Уфимский государственный
авиационный технический университет
E-mail: zaiko@ugatu.ac.ru

Zaiko Aleksandr Ivanovich
doctor of technical science, professor,
sub-department of theoretical fundamentals
of electrical engineering,
Ufa State Aviation Technical University

УДК 621.317.2
Заико, А. И.
Алгоритмы и погрешности измерений распределений и характеристических функций эргодических случайных процессов / А. И. Заико // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. – 2014. – № 1 (7). – С. 25–34.